

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

12105 – ÚSTAV MECHANIKY,
BIOMECHANIKY A MECHATRONIKY



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
2018**

Ohybový snímač posuvu

Bending displacement sensor

MATĚJ

MŽOUREK

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Mžourek** Jméno: **Matěj** Osobní číslo: **457579**
Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**
Zadávající katedra/ústav: **Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky**
Studijní program: **Teoretický základ strojího inženýrství**
Studijní obor: **bez oboru**

II. ÚDAJE K BAKALÁŘSKÉ PRÁCI

Název bakalářské práce:

Ohybový snímač posuvu

Název bakalářské práce anglicky:

Bending Displacement Sensor

Pokyny pro vypracování:

- 1) Rešerše analytického řešení průhybu v oblasti malých i velkých deformací
- 2) Experimentální prověření existujícího snímače
- 3) Porovnání s výpočtním řešením
- 4) Zhodnocení

Seznam doporučené literatury:

Michalec J. a kol., Pružnost a pevnost I, ČVUT v Praze, 2006
Timoshenko, S., Strength of materials. 3rd ed. Malabar, Fla: Krieger Pub. Co, 1983
Bisshopp, K. E. a Drucker D. C., Large deflection of cantilever beams. Quarterly of Applied Mathematics 1945

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) bakalářské práce:

Ing. Karel Doubrava, Ph.D., odbor pružnosti a pevnosti FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) bakalářské práce:

Datum zadání bakalářské práce: **21.04.2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **17.08.2018**

Platnost zadání bakalářské práce: _____



Ing. Karel Doubrava, Ph.D.
podpis vedoucí(ho) práce



prof. Ing. Milan Růžička, CSc.
podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry



prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.
podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Student bere na vědomí, že je povinen vypracovat bakalářskou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v bakalářské práci.

Datum převzetí zadání

Podpis studenta

ANOTAČNÍ LIST

Jméno autora:	Matěj Mžourek
Název práce:	Ohybový snímač posuvu
Anglický název:	Bending displacement sensor
Akademický rok:	2017/2018
Studijní program:	Teoretický základ strojího inženýrství
Ústav/odbor:	Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky / Odbor pružnosti a pevnosti
Vedoucí:	Ing. Karel Doubrava, Ph.D.
Bibliografické údaje:	počet stran: 45
	počet obrázků: 17
	počet grafů: 18
	počet příloh: 3
Klíčová slova:	ohybový moment, snímač posuvu, nosník, napětí, deformace
Keywords:	bending moment, displacement sensor, beam, stress, deformation
Abstrakt:	Předmětem bakalářské práce <i>Ohybový snímač posuvu</i> je analýza vlastností snímače posuvu založeném na měření deformace vzniklé ohybem. Snímač je posuzován pomocí analytického řešení a experimentálně naměřených hodnot. Výsledky obou metod jsou vzájemně porovnány.
Abstract:	The subject of the bachelor thesis <i>Bending displacement sensor</i> is the analysis of the characteristics of a displacement sensor, that is based on the measurement of deformation, which is the product of bending. The sensor is studied through theoretical calculations and experimental data. The results of both methods are put in comparison.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Karla Doubravy, Ph.D. a s použitím literatury uvedené v seznamu zdrojů.

V Praze dne 6. 6. 2018

.....

Matěj Mžourek

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych rád poděkoval vedoucímu této bakalářské práce Ing. Karlovi Doubravovi, Ph.D. za odborné vedení, vstřícný přístup a čas, který mi během vytváření této práce věnoval. Rovněž velice děkuji Doc. Ing. Tomáši Marešovi, Ph.D. za objasnění některých nejasností vzniklých při aplikaci nelineárního řešení, a také mé rodině a přítelkyni za veškerou jejich podporu, které se mi během studia dostávalo.

Obsah

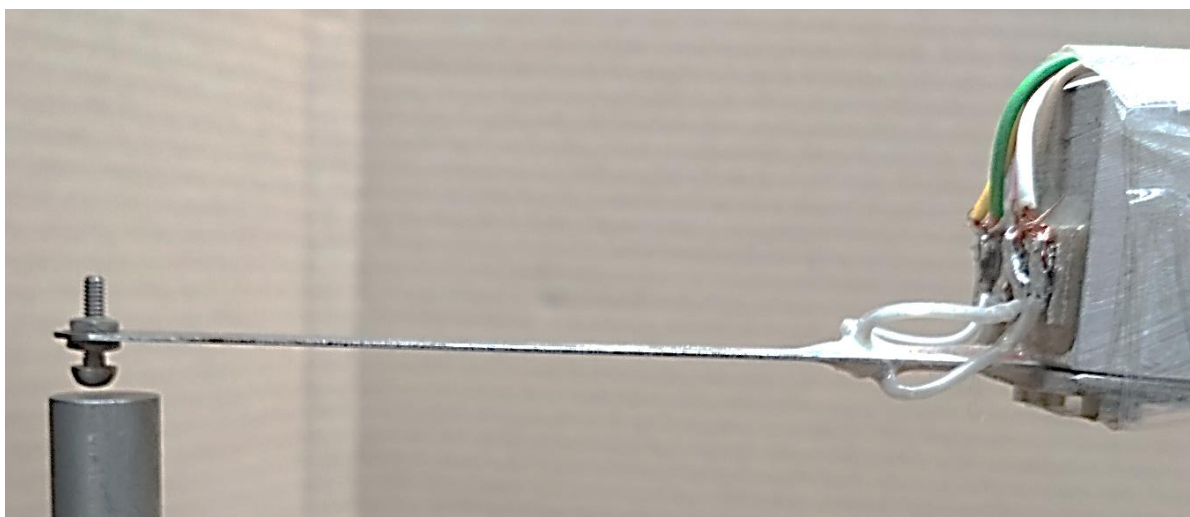
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A OZNAČENÍ	7
ÚVOD	8
1. TEORETICKÁ ČÁST	9
1.1. Napětí při prostém ohybu	9
1.2. Odvození Bernoulliho rovnice	13
1.3. Analytické řešení pomocí Bernoulliho rovnice	16
1.4. Omezení Bernoulliho rovnice	19
1.5. Odvození nelineárního analytického řešení	24
1.6. Porovnání výsledků analytických řešení	28
2. PRAKTICKÁ ČÁST	32
2.1. Popis experimentu	32
2.2. Porovnání experimentu a analytických řešení	33
2.3. Zhodnocení experimentu	39
ZÁVĚR	42
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	43
PŘÍLOHY	44

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A OZNAČENÍ

Symbol	Jednotky	Význam
A	[mm ²]	plocha
b	[mm]	šířka
B	[N·mm ²]	tuhost
E	[MPa]	Youngův modul pružnosti v tahu
F	[N]	obecná síla
G	[MPa]	modul pružnosti ve smyku
h	[mm]	výška
J_z	[mm ⁴]	osový kvadratický moment
l	[mm]	délka
$M_o(x)$	[N·mm]	vnitřní ohybový moment
p	[mm]	svislý posuv (jako parameter)
r	[mm]	poloměr křivosti
R	[N]	reakční síla
S	[mm ³]	statický moment průřezu
$T(x)$	[N]	vnitřní posouvající síla
U	[J]	deformační energie
v	[mm]	svislý posuv
β	[-]	koeficient pro výpočet deformační energie od posouvající síly
ν	[-]	Poissonovo číslo
Δ	[mm]	vodorovný posuv
ε	[-]	poměrné prodloužení
σ	[MPa]	normálové napětí
σ_k	[MPa]	napětí na mezi kluzu
φ	[°]	natočení

ÚVOD

Měření posuvu bodů zkoumaných těles či konstrukcí během zatěžování patří mezi nutné podmínky identifikace jejich mechanických či materiálových vlastností. K určení posuvu je možné použít celou řadu snímačů založených na různých principech. Předmětem bakalářské práce je zkoumání vlastností ohybového snímače posuvu. Snímač je již delší dobu využíván v laboratoři odboru pružnosti a pevnosti Fakulty strojní ČVUT v Praze, a jelikož se z několika důvodů jeví být snímač užitečným nástrojem při získávání experimentálních dat, je na místě, aby byl řádně analyzován, což může dále rozšířit oblast jeho využitelnosti, například pro měření větších deformací. Snímač lze popsat jako velice tenký vetknutý nosník, na jehož volném konci dochází k dotyku se zkoumaným objektem a u jehož vetknutého konce je umístěna dvojice tenzometrů, pomocí kterých lze určit posuv volného konce. Jednou z předností použití snímače, oproti lepení tenzometrů přímo na zkoumaný objekt, je časová nenáročnost instalace, a možnost po provedení měření snímač opět použít pro další experimenty. Další výhodou oproti použití extenzometrů je fakt, že snímač využívá tenzometry, což ulehčuje integraci snímačů do měřicího systému, který je založen primárně na tenzometrech. Oproti extenzometrům a jiným zařízením, které se běžně používají k měření posuvu, je také zkoumaný snímač podstatně levnější, což ho činí vhodným například k destruktivním zkouškám, kde je pravděpodobné že bude senzor posuvu poškozen. Zkoumána budou také analytická řešení deformace snímače. Nabízí se využít Bernoulliho rovnici průhybové čáry a vzhledem ke zkoumání snímače i v oblasti větších deformací bude řešení provedeno také pomocí nelineární metody. Cílem bakalářské práce je zmapování chování snímače s ohledem na velikost měřeného posuvu.



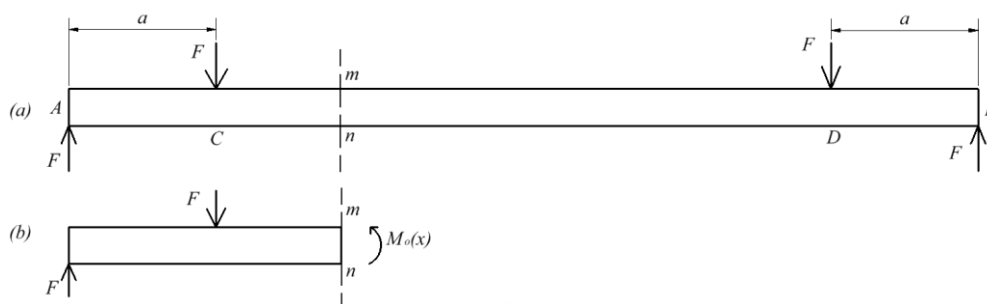
obr. 1 – ohybový snímač posuvu

1. TEORETICKÁ ČÁST

1.1. Napětí při prostém ohybu

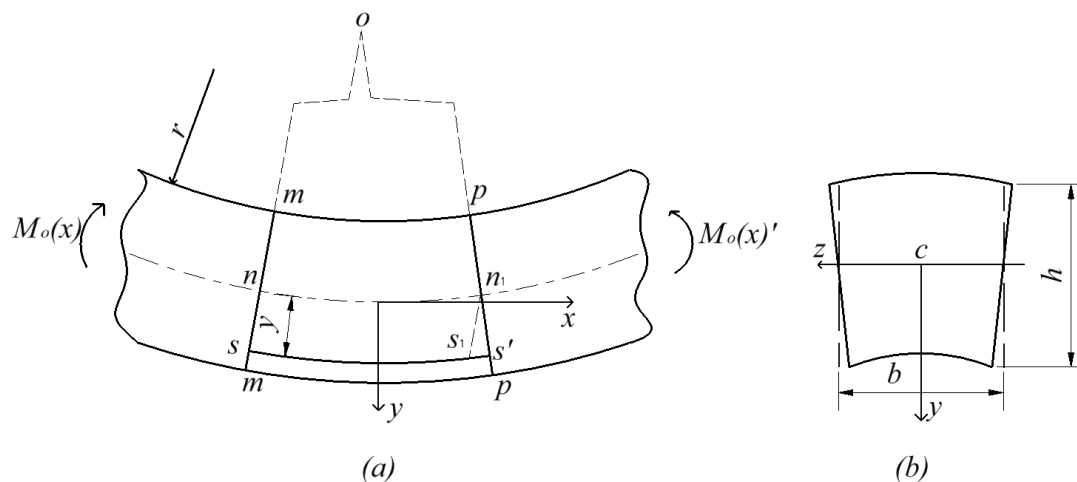
Pro odvození Bernoulliho rovnice je nutné znát napětí, které vzniká v nosníku při jeho ohybu. U tenkého dlouhého nosníku je svislý posuv způsobený ohybovým momentem mnohonásobně větší, než posuv způsobený posouvající silou – Bernoulliho rovnice proto vychází čistě z ohybového napětí, a smykové napětí zanedbává.

Uvažován je nosník s neměnným obdélníkovým průřezem dle *obr. 2(a)*. Ze symetrie je zřejmé, že reakce v místech *A* a *B* jsou rovny síle *F*. Díky statické rovnováze odříznuté části (*obr. 2(b)*) platí, že účinek vnitřních sil v řezu *m-n*, které lze interpretovat jako silový účinek odříznuté části nosníku napravo od *m-n* na část nosníku nalevo od *m-n*, je roven účinku momentu $F \cdot a$. Pro popsání rozložení těchto silových účinků v řezu *m-n* je třeba uvažovat deformaci nosníku.



obr. 2 – vzorový nosník

Uvažován je jednoduchý případ, kde vnější ohybové momenty působící na nosník leží v rovině rovnoběžné s podélnou rovinou symetrie nosníku. Zdeformovaná pomyslná materiálová vlákna budou v tomto případě také ležet v rovinách rovnoběžných s podélnou rovinou symetrie nosníku. Pokud na nosníku s obdélníkovým průřezem (před deformací) budou na bocích vyznačené dvě svislé rovnoběžné úsečky *pp* a *mm*, zůstanou po deformaci tyto úsečky rovnými čarami (zjištěno experimentálně, viz Timoshenko – (1)) a zároveň normálami k materiálovým vláknům nosníku – viz *obr. 3(a)*.



obr. 3 – deformace nosníku od ohýbání

Pro pravdivost následujících vztahů je též nutné aby platilo, že po deformaci zůstávají původně obdélníkové profily nosníku (profily kolmé k podélné ose nosníku) rovinné. Tuto podmínku lze považovat za splněnou při uvažování malých deformací nosníku. Z této skutečnosti plyne, že po deformaci nosníku se řezy $m-m$ a $p-p$ otáčí kolem os kolmých k rovinám, ve kterých leží zdeformovaná materiálová vlákna. Je tedy zřejmé, že vlákna na konvexní ploše nosníku jsou natahována, zatímco vlákna na konkávní straně jsou stlačována – viz *obr. 3(a)*.

Křivka nn_1 je stopa plochy, ve které nejsou vlákna během ohybu nosníku nijak namáhána. Tato plocha se nazývá plochou neutrální a její průsečnice s rovinou symetrie zdeformovaného nosníku se nazývá neutrální osou. Délka křivky s_1s' je prodloužení vlákna ve vzdálenosti y od neutrální plochy. Bod s_1 je průsečík rovnoběžky úsečky mm procházející bodem n_1 s průmětem zkoumaného vlákna. Poloměr zakřivení neutrální osy je značen jako r . Využitím podobnosti trojúhelníků non_1 a s_1n_1s' vzniká vzorec pro poměrné prodloužení vlákna ss' :

$$\varepsilon_x = \frac{s'_1s_1}{nn_1} = \frac{y}{r}.$$

[1]

Z rovnice [1] plyne, že prodloužení podélných vláken je přímo úměrné vzdálenosti y od neutrální plochy a nepřímo úměrné poloměru zakřivení r . Prodloužení vláken na konvexní straně nosníku je doprovázeno zmenšením šířky profilu, zatímco zkrácení vláken na konkávní straně nosníku je doprovázeno růstem šířky profilu obdobně, jako v případě prostého tahu či tlaku – viz *obr. 3(b)*. Vlivem tohoto jevu se mění tvar profilu nosníku, jeho svislé strany již nejsou rovnoběžné ale různoběžné.

Pro poměrné prodloužení ve směru osy z platí následující vztah:

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \frac{y}{r},$$

[2]

kde ν je Poissonovo číslo – materiálová konstanta vyjadřující poměr mezi relativním prodloužením a příčným zkrácením. Z platnosti tohoto vztahu plyne, že všechny úsečky v původním nezdeformovaném obdélníkovém průřezu rovnoběžné s osou z se zakříví tak, aby po deformaci tvořily normály k úsečkám které tvoří boky profilu. Jejich poloměr zakřivení r' bude větší než poloměr zakřivení průhybové čáry r ve stejném poměru, jako je ε_x (absolutně) větší než ε_z – viz rovnice [2]. Vzniká tak následující vztah:

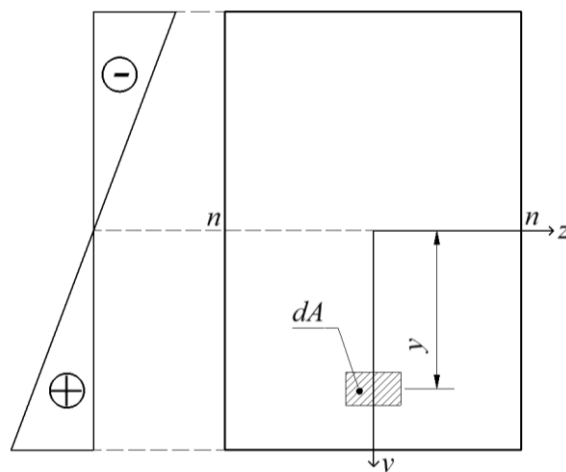
$$r' = \frac{1}{\nu} r.$$

[3]

Dosazením vztahu [1] do Hookova zákona pro jednoosou napjatost je získán následující vztah:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E \cdot y}{r}.$$

[4]



obr. 4 – průběh napětí v průřezu ohýbaného nosníku

Na obr. 4 je znázorněn průběh napětí v profilu nosníku („+“ znázorňuje tahové napětí, „-“ napětí tlakové). Velikost napětí v libovolném vlákne je přímo úměrná jeho vzdálenosti od neutrální osy nn . V rovnici [4] se vyskytují dvě neznámé – poloha neutrální osy od které je kótována vzdálenost y a poloměr zakřivení r . Tyto neznámé lze nyní zjistit z následující skutečnosti: silový účinek vnitřních sil v libovolném řezu nosníku musí vytvářet rovnováhu se silovým účinkem vnějšího momentu působícího na nosník – viz obr. 2.

Nechť je dA jednotkový element plochy ve vzdálenosti y od neutrální osy (obr. 4). Síla působící na této elementární ploše vzniká z napětí (viz rovnice [4]) a obsahu dA :

$$F_x = \sigma_x \cdot dA .$$

[5]

Jelikož výsledný silový účinek všech sil v průřezu nosníku se musí rovnat vnějšímu momentu, výslednice těchto sil musí být rovna nule, a tedy:

$$\int \frac{E \cdot y}{r} dA = \frac{E}{r} \int y \cdot dA = 0 .$$

[6]

Z výrazu plyne, že statický moment profilu vzhledem k neutrální ose je roven nule, z čehož vyplývá, že neutrální osa prochází těžištěm profilu.

Silové momenty k neutrální ose tvořené normálovými vnitřními silami k profilu nosníku lze popsat rovnicí:

$$dM_o(x) = \frac{E \cdot y}{r} dA \cdot y = \frac{E \cdot y^2}{r} dA .$$

[7]

Sečtením všech těchto momentů působících na celém průřezu nosníku je získán moment stejně veliký, jako je vnější moment působící na odříznutou část nosníku:

$$\int \frac{E}{r} y^2 \cdot dA = \frac{E \cdot J_z}{r} = M_o(x) \quad \text{tedy} \quad \frac{1}{r} = \frac{M_o(x)}{E \cdot J_z} ,$$

[8]

kde

$$J_z = \int y^2 \cdot dA$$

[9]

je moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ose z . Z rovnice [8] plyne, že křivost (převrácená hodnota poloměru křivosti r) je přímo úměrná velikosti ohybového momentu M_o a nepřímo úměrná součinu $E \cdot J_z$. Vyjádřením poloměru křivosti r z rovnice [4] a dosazením do rovnice [8] vzniká výsledný vztah pro výpočet napětí vzniklého ohybem:

$$\sigma_x = \sigma_o = \frac{M_o \cdot y}{J_z}.$$

[10]

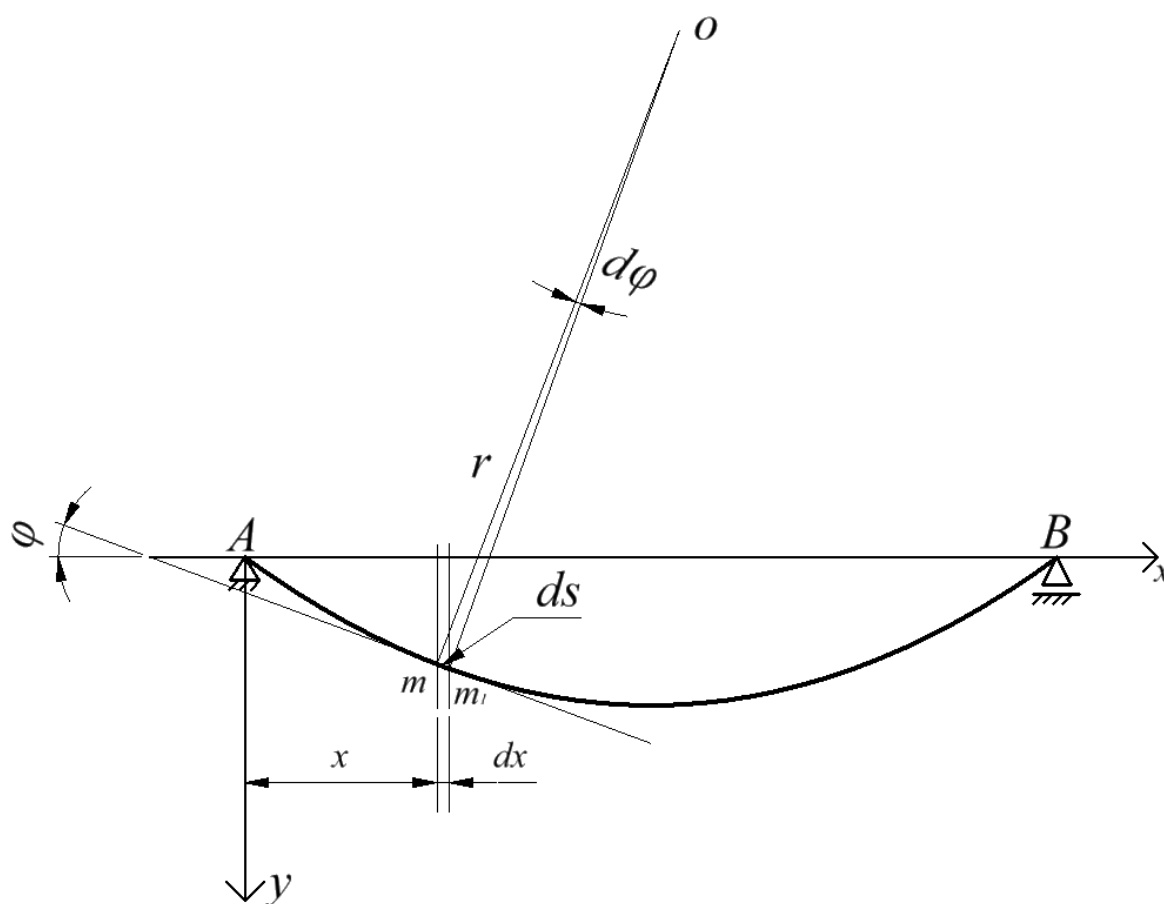
Z rovnice je zřejmé, že největší absolutní ohybové napětí $|\sigma_o|$ vzniká v místech horních a dolních krajních vláken průřezu.

Ačkoliv byl během celého odvození uvažován obdélníkový profil nosníku, platí výsledné vztahy pro libovolný nosník, jehož průřez je symetrický vzhledem rovině, ve které leží vnější ohybové momenty působící na tento nosník. V těchto případech totiž dochází k zakřívování v rovině, ve které leží vnější ohybové momenty a průřezy nosníku zůstávají během ohybu rovinné a normálové k průhybové čáře (taktéž k pomyslným materiálovým vláknům).

1.2. Odvození Bernoulliho rovnice

Nechť křivka AmB na obr. 5 představuje podélnou osu nosníku po deformaci způsobené ohybem. Tato křivka se nazývá průhybová čára. Pro odvození rovnice této křivky (tj. Bernoulliho rovnice) jsou uvažovány vyznačené osy x a y a je předpokládáno, že křivost této křivky v libovolném bodě závisí pouze na působícím ohybovém momentu. V takovém případě je vztah mezi křivostí a ohybovým momentem totožný s rovnicí [8].

Pro odvození vztahu mezi křivostí a samotným tvarem křivky je dále uvažován délkový element ds vytknutý na průhybové čáře dvojicí sousedních bodů m a m_1 . Je-li úhel natočení, který svírá tečna průhybové čáře v bodě m s osou x , označen jako φ , potom normály k průhybové čáře v bodech m a m_1 svírají úhel $d\varphi$. Průsečík těchto normál o je střed křivosti, který udává poloměr křivosti r .



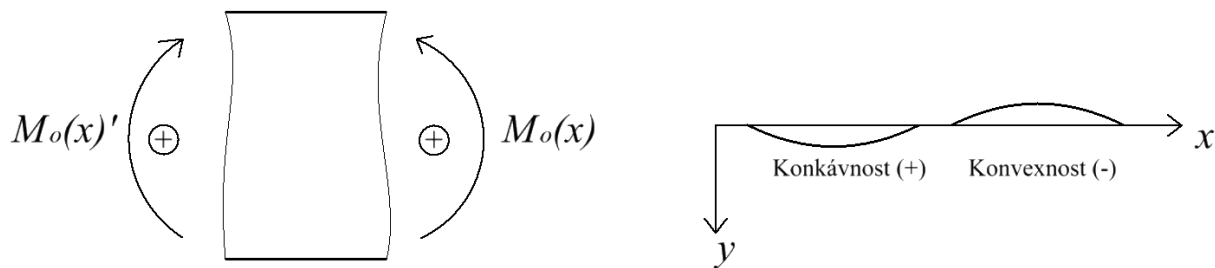
obr. 5 – deformační čára ohýbaného nosníku

Pomocí geometrie lze nyní získat následující vztahy:

$$ds = r \cdot d\varphi \quad a \quad \frac{1}{r} = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|.$$

[11]

Rovnice [11] obsahuje absolutní hodnoty, jelikož podstatná je pouze velikost poloměru křivosti r . Co se týče samotného znaménka, je konvence chápat kladný ohybový moment jako takový, který způsobuje konkávnost (je nutné brát v úvahu orientaci kladné poloosy y) – viz obr. 6.



obr. 6 – znaménkové konvence ohybových momentů a posuvů

Jak je vidět z obr. 5, kladné křivosti je dosaženo, leží-li střed křivosti o nad osou x (v záporné části osy y). Je rovněž zřejmé, že s posouváním bodu m od bodu A směrem k bodu B se zmenšuje úhel φ , neboli pokud se zvětšuje souřadnice x , zmenšuje se úhel φ . Musí tedy platit, že kladnému přírůstku ds odpovídá záporný přírůstek $d\varphi$. Rovnici [11] lze tedy přepsat jako:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\varphi}{ds}$$

[12]

Uvažují-li se velice malé deformace nosníku, tzn. průhybová čára se přibližuje přímce, lze zavést následující zjednodušení:

$$ds \approx dx \quad \text{a} \quad \varphi \approx tg\varphi = \frac{dy}{dx}.$$

[13]

Dosazením zjednodušení z výrazu [13] do rovnice [12] vzniká vztah:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

[14]

Dosazením rovnice [14] do rovnice [8] je získán výsledný tvar Bernoulliho rovnice:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_o(x)}{E \cdot J_z}$$

[15]

Je-li uvažován nosník konstantního průřezu a vyrobený z jednoho materiálu, jsou hodnoty E a J_z konstanty – pouze ohybový moment $M_o(x)$ je funkce x . Rovnici lze řešit separací diferenciálů proměnných dx a dy a následnou postupnou integrací. Průhyb je značen $v(x)$, potom platí:

$$v(x) = y = \frac{1}{E \cdot J_z} \iint M_o(x) dx^2$$

[16]

První derivaci libovolné funkce lze interpretovat jako funkci směrnice její tečny. Lze tedy uvažovat, že derivováním posuvu $v(x)$ podle x je získána funkce úhlu natočení $\varphi(x)$ – úhel, který svírá tečna průhybové čáry v bodě ve vzdálenosti x s osou x . Pro $\varphi(x)$ tedy platí:

$$\varphi(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x}$$

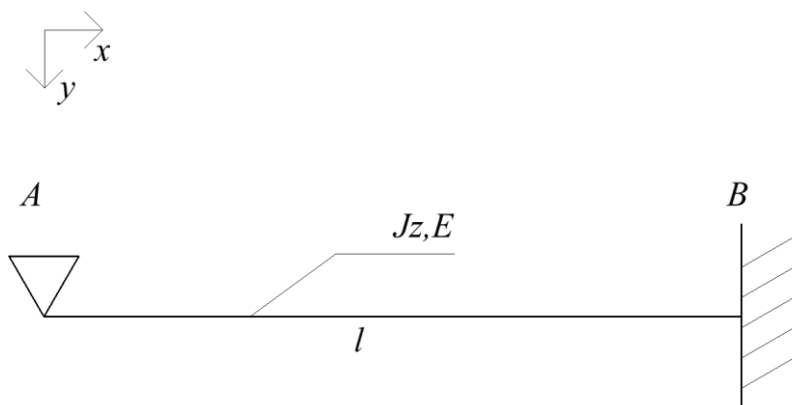
[17]

Během dvou integrací, které je nutno provést pro vyřešení rovnice [16], vznikají dvě integrační konstanty, jejichž hodnotu lze zjistit doplněním úlohy o dvě okrajové podmínky, z nichž musí být alespoň jedna pro posuv $v(x)$, druhá potom pro natočení $\varphi(x)$ či posuv $v(x)$.

Například, pro nosník z *obr. 4* lze napsat tyto okrajové podmínky: posuv $v(x)$ v kloubové podpěře A je nulový, a natočení $\varphi(x)$ ve středu nosníku je nulové (druhá podmínka vychází ze symetrie úlohy).

1.3. Analytické řešení pomocí Bernoulliho rovnice

Úlohu lze interpretovat následujícím způsobem: Vetknutý nosník o délce l , s osovým statickým momentem J_z , vyrobený z materiálu s Youngovým modulem pružnosti v tahu E je v bodě B vetknutý, zatímco v bodě A je se základním rámem spojen obecnou vazbou (tato vazba představuje dotyk snímače a zkoumaného nosníku). Úloha bude řešena s ohledem na zavedený souřadnicový systém xy . Úloha je graficky znázorněna na *obr. 7*.



obr. 7 – model pro analytické řešení ohybového snímače posuvu

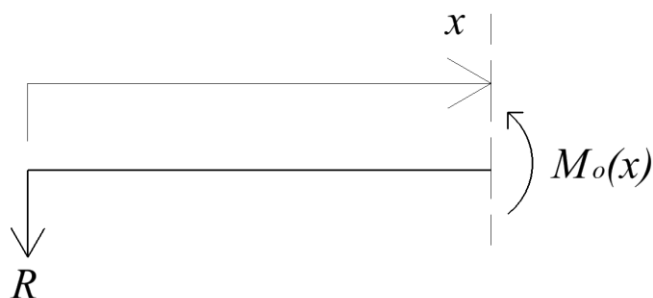
Cílem je zjistit průběh ohybového momentu v závislosti na posuvu $v(x)$ nosníku v bodě A . K řešení bude využita dříve odvozená Bernoulliho diferenciální rovnice průhybové čáry.

Pro řešení Bernoulliho rovnice je třeba znát průběh ohybového momentu $M_o(x)$ po celé délce nosníku. Pro jeho zjištění je vhodné využít metody řezu zleva, nejprve je tedy třeba odstranit obecnou vazbu v bodě A . Vazba je nahrazena reakční silou R . Nové schéma je znázorněno na *obr. 8*.



obr. 8 – nahrazení vazby reakční silou

Nyní je již možné použít metodu řezu:



obr. 9 – aplikace metody řezu pro určení vnitřního ohybového momentu

Pomocí statické podmínky rovnováhy pro momenty lze nyní vyjádřit velikost ohybového momentu $M_o(x)$ v závislosti na reakční síle R a souřadnici x :

$$M_o(x) = -R \cdot x$$

[18]

Vztah [18] lze nyní použít v Bernoulliho rovnici:

$$v''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_o(x)}{E \cdot J_z} = \frac{R}{E \cdot J_z} x$$

[19]

Tuto rovnici lze řešit separací proměnných a následnou integrací. Vznikají tak následující vztahy:

$$v'(x) = \varphi(x) = \int_{(l)} \frac{R}{E \cdot J_z} x \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{R}{E \cdot J_z} x^2 + C_1,$$

[20]

a

$$v(x) = \int_{(l)} \left[\frac{1}{2} \frac{R}{E \cdot J_z} x^2 + C_1 \right] \cdot dx = \frac{1}{6} \frac{R}{E \cdot J_z} x^3 + C_1 \cdot x + C_2.$$

[21]

Integrační konstanty C_1 a C_2 lze určit pomocí okrajových podmínek. Jelikož je nosník v bodě B vetknutý, nedojde v tomto bodě k natočení ani posuvu. Okrajové podmínky jsou tedy:

$$\varphi(x=l) = 0 = \frac{1}{2} \frac{R}{E \cdot J_z} l^2 + C_1,$$

[22]

a

$$v(x=l) = 0 = \frac{1}{6} \frac{R}{E \cdot J_z} l^3 + C_1 \cdot l + C_2.$$

[23]

Řešením soustavy rovnic [22] a [23] jsou získány hodnoty integračních konstant.

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{R}{E \cdot J_z} l^2$$

[24]

$$C_2 = \frac{1}{3} \frac{R}{E \cdot J_z} l^3$$

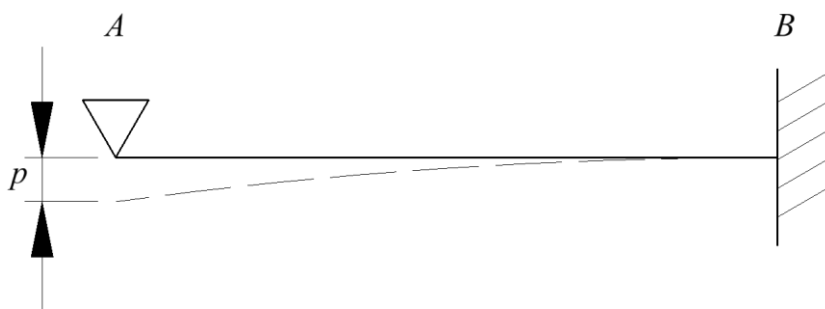
[25]

Dosazením rovnic [24] a [25] do rovnice [23] je získán výsledný vztah pro posuv $v(x)$, tedy:

$$v(x) = \frac{1}{6} \frac{R}{E \cdot J_z} x^3 - \frac{1}{2} \frac{R}{E \cdot J_z} l^2 \cdot x + \frac{1}{3} \frac{R}{E \cdot J_z} l^3$$

[26]

Nyní je třeba vyřešit velikost reakční síly R .



obr. 10 – posuv koncového bodu snímače

Lze formulovat další deformační podmínku, pomocí které lze vyjádřit reakční sílu R v závislosti na velikosti posuvu – posuv v v bodě A je roven p :

$$v(x = 0) = p = \frac{1}{3} \frac{R}{E \cdot J_z} l^3$$

[27]

Z rovnice [27] tedy plyne:

$$R = p \frac{3 \cdot E \cdot J_z}{l^3}$$

[28]

Dosazením vztahu [28] do rovnice [18] je získán požadovaný vztah pro závislost ohybového momentu $M_o(x)$ na velikosti posuvu p :

$$M_o(x) = -p \frac{3 \cdot E \cdot J_z}{l^3} x$$

[29]

1.4. Omezení Bernoulliho rovnice

Bernoulliho rovnice je snadno aplikovatelný nástroj pro analýzu deformací nosníků, je však nutné před její volbou pro řešení konkrétního problému zvážit, zda je schopná být dostatečně přesná - řešený nosník musí splňovat určité podmínky, které vyplývají z předpokladů využitých při odvození. Jeden z těchto předpokladů je platnost Hookova zákona – viz [4]. Bernoulliho rovnice tedy platí pouze pro nosníky vyrobené z materiálů, pro které s rostoucí poměrnou deformací ε roste napětí σ v oblasti elastických deformací dostatečně lineárně.

Zároveň je od samého začátku zanedbáván vliv posouvající síly na výslednou deformaci. Jak již bylo dříve zmíněno, posouvající sílu lze zanedbat pouze v případě dlouhého, tenkého nosníku. Tato skutečnost bude tedy pro řešený snímač ověřena. Pro porovnání posuvů vzniklých vlivem posouvající síly $T(x)$ a ohybového momentu $M_o(x)$ bude použito energetické řešení pomocí Castiglianovy metody.

Castiglianova věta říká, že parciální derivace deformační energie U akumulované v soustavě podle vnější síly na soustavu působící je rovna velikosti posuvu ve směru dané síly.

$$v_n = \frac{\partial U}{\partial F_n}$$

[30]

Deformační energie U_T akumulovaná v soustavě v důsledku působení smykové (posouvající) síly $T(x)$ je definována jako:

$$U_T = \frac{\beta}{2} \int_{(l)} \frac{T^2(x)}{G \cdot A} dx ,$$

[31]

kde G je modul pružnosti ve smyku, A je obsah profilu nosníku, a pro β platí výraz:

$$\beta = \frac{A}{J_z^2} \int_{(A)} \frac{S^2}{b^2(y)} dA ,$$

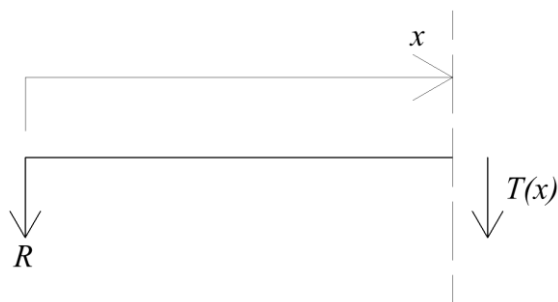
[32]

kde S je statický moment průřezu a $b(y)$ je šířka průřezu. Pro obdélníkový průřez libovolných rozměrů platí:

$$\beta = \frac{6}{5} .$$

[33]

Pro zjištění deformační energie od posouvající síly U_T je tedy dle rovnice [31] nutné znát průběh funkce posouvající síly $T(x)$. Je proto vhodné opět využít metody řezu.



obr. 11 – aplikace metody řezu pro určení vnitřní posouvající síly

Z podmínky statické rovnováhy odříznuté části nosníku z obr. 11 vyplývá vztah:

$$T(x) = -R .$$

[34]

Deformační energii od posouvající síly U_T lze tedy spočítat, jako:

$$U_T = \frac{6}{5 \cdot 2} \int_0^l \frac{(-R)^2}{G \cdot A} dx = \frac{3}{5} \frac{l}{G \cdot b \cdot h} R^2 .$$

[35]

Použitím Castiglianovy věty platí pro posuv v_T v bodě A vzniklý vlivem posouvající síly $T(x)$ vztah:

$$v_T = \frac{\partial U_T}{\partial R} = \frac{6}{5} \frac{l}{G \cdot b \cdot h} R .$$

[36]

Obdobným způsobem lze zjistit i posuv vzniklý působením ohybového momentu $M_o(x)$. Deformační energie od ohybového momentu akumulovaná v soustavě je definována následujícím vztahem:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{(I)} \frac{M_o^2(x)}{E \cdot J_z} dx .$$

[37]

Dosazením vztahu pro $M_o(x)$ z rovnice [18] vzniká:

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{(I)} \frac{(-R \cdot x)^2}{E \cdot J_z} dx = \frac{1}{6} \frac{l^3}{E \cdot J_z} R^2 .$$

[38]

Posuv v_M od ohybového momentu lze vyjádřit obdobně jako v předchozím případě při počítání s posouvající silou - derivací deformační energie podle reakční síly R , tedy:

$$v_m = \frac{\partial U_M}{\partial R} = \frac{1}{3} \frac{l^3}{E \cdot J_z} R .$$

[39]

Stojí za povšimnutí, že výraz [39] je identický s výrazem [27], tedy zjištěný posuv pomocí Bernoulliho rovnice se rovná posuvu v_M z Castiglianovy věty. Oba přístupy jsou si totiž vzájemně ekvivalentní a výsledné posuvy se budou pro libovolný nosník shodovat.

Nyní je již možné posuv vzniklý posouvající silou v_T a ohybovým momentem v_M porovnat:

$$\frac{v_M}{v_T} = \frac{10}{3} \frac{G}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^2 .$$

[40]

Při úpravách tohoto výrazu je použit vztah pro moment setrvačnosti J_z obdélníkového průřezu

$$J_z = \frac{1}{12} b \cdot h^3 ,$$

[41]

kde b je šířka a h výška obdélníka.

Pro poměr Youngova modulu pružnosti E a modulu pružnosti ve smyku G platí vztah:

$$\frac{G}{E} = \frac{1}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

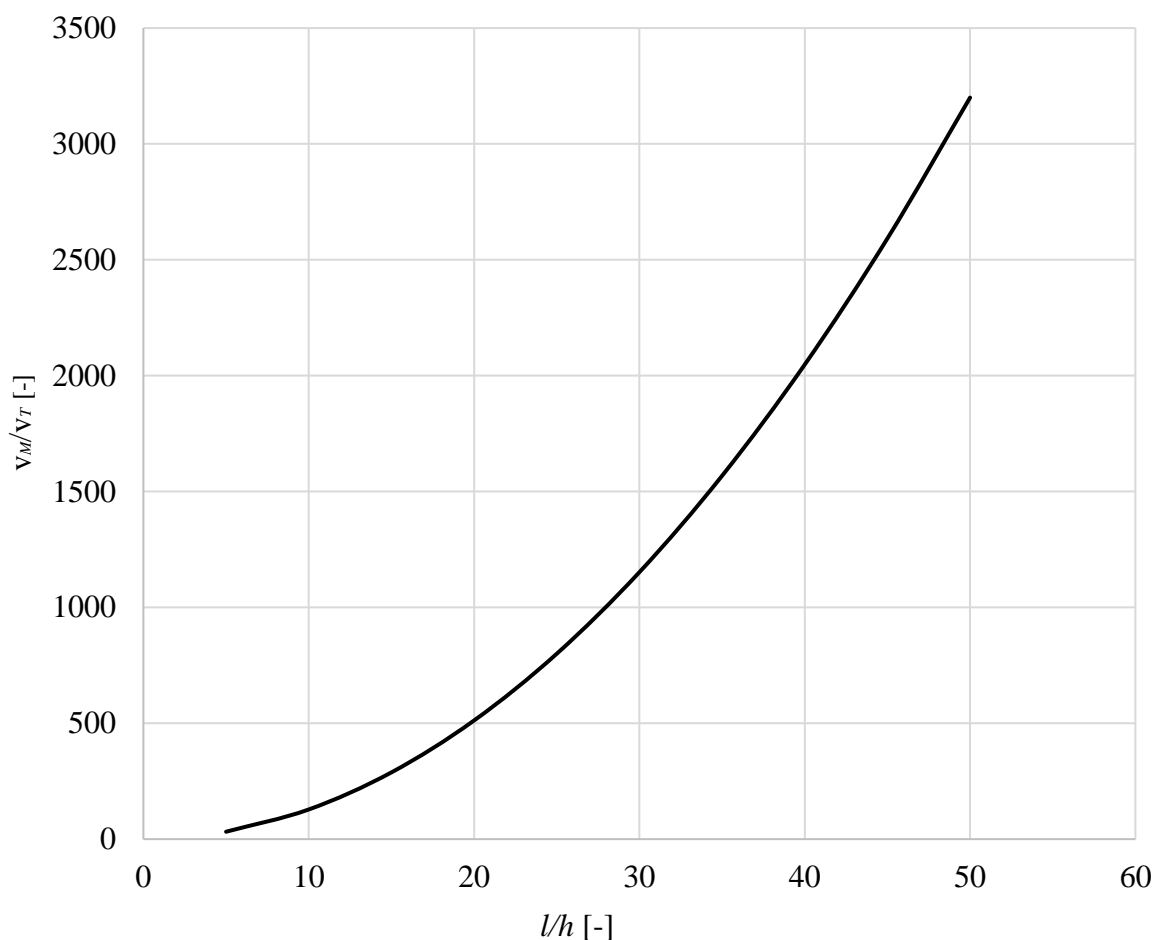
[42]

Poissonovo číslo ν je pro ocelové materiály rovno přibližně 0,3. Dosazením rovnice [42] do vztahu [40] vzniká vztah:

$$\frac{v_M}{v_T} = 1,28 \left(\frac{l}{h} \right)^2 .$$

[43]

Poměr velikosti posuvu od ohybového momentu v_M vůči velikosti posuvu od posouvající síly v_T tedy roste s druhou mocninou poměru délky nosníku l vůči jeho výšce h . Tato závislost je znázorněná v grafu 1.

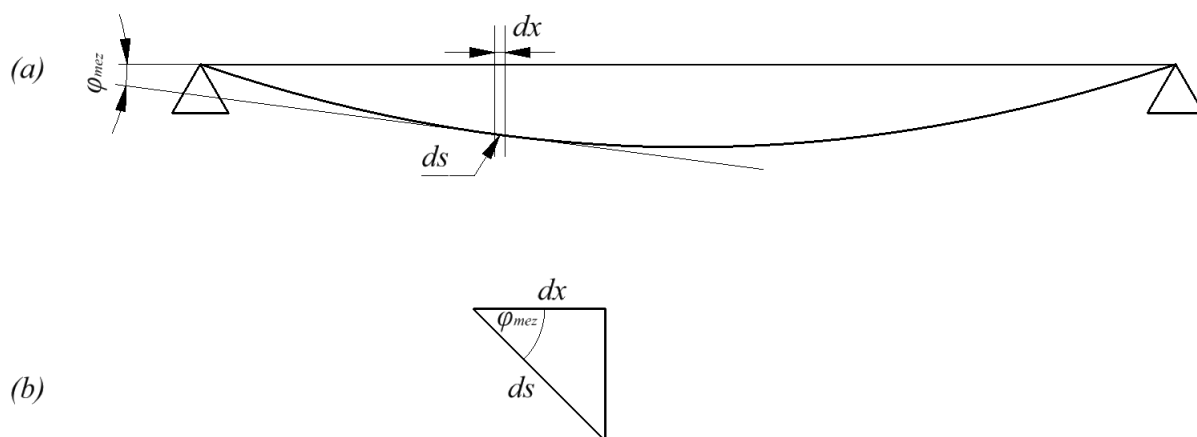


graf 1 – poměr posuvů od ohybového momentu a posouvající síly v závislosti na poměru délky nosníku a výšky průřezu

Z grafu je zřejmé, že pro ohýbaný tenký dlouhý nosník je vliv posouvající síly na posuv oproti vlivu ohybového momentu zanedbatelný. Například pokud délka nosníku l je 20krát větší než výška nosníku h , je posuv v_M od ohybového momentu přibližně 500krát větší, než je posuv od posouvající síly v_T . Poměr l/h je u snímače roven téměř 160.

Dále je nutno zohlednit vliv zjednodušení využitého v rovnici [13], kde bylo řečeno, že délkový element průhybové čáry ds má přibližně stejnou velikost, jako délkový element nezdeformovaného nosníku dx . Toto zjednodušení bude platit pouze pro velmi malé natočení $\varphi(x)$ – s rostoucím natočením se bude výrazně zvětšovat velikost ds oproti dx .

Z goniometrie lze určit mezní úhel natočení φ_{mez} , při jehož překročení bude Bernoulliho rovnice ztrácet pro daný případ platnost.



obr. 12 – závislost mezi elementy dx a ds

Podle obr. 12(a) je ds délkový element křivky, jelikož se však jeho velikost blíží nule, lze jej nahradit v obr. 12(b) úsečkou. Z tohoto trojúhelníka lze pomocí goniometrie určit vztah pro poměr velikostí dx a ds . Doplněním tohoto vztahu o podmínku možného rozdílu velikostí elementů s volbou maximálně 1% rozdílu vzniká vztah:

$$\cos(\varphi_{mez}) = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1,01},$$

[44]

a tedy

$$\varphi_{mez} \cong 8^\circ.$$

[45]

Je tedy vhodné zvážit, zda je Bernoulliho rovnice použitelná, přesáhne-li úhel natočení φ hranici 8° .

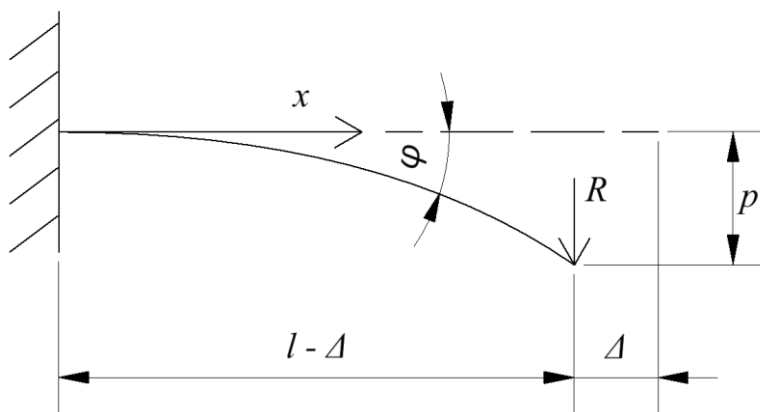
1.5. Odvození nelineárního analytického řešení

Jelikož je snímač velice tenký a dlouhý, je snadné u něj dosáhnout větších deformací, jejichž výpočet již není vhodné provádět pomocí Bernoulliho rovnice, protože základní předpoklady pro její odvození přestávají být platné, a zároveň zcela ignoruje horizontální složku posuvu nosníku, která při větších deformacích zkracuje rameno působení síly.

Odvození vychází z článku od D. C. Drucker a K. E. Bisshopp – viz (4).

Základní předpoklady vychází ze skutečnosti, že křivost je přímo úměrná ohybovému momentu – viz [8].

Uvažován je dlouhý a tenký vetknutý nosník o délce l zatížený osamělou silou R (v případě snímače ohybu se jedná o reakční sílu) na volném konci, jehož tuhost je $B = EJ_z$ v případě přibližně čtvercového průřezu nosníku, nebo $B = EJ_z/(1-\nu^2)$ v případě „širokého“ nosníku (nosník je v tomto případě považován za desku). Horizontální složka posuvu volného konce je Δ , vertikální složka p . Natočení je značeno φ , čárkovaná úsečka představuje nosník před deformací.



obr. 13 – model ohýbaného nosníku

Použitím vztahu pro křivost [11] vzniká vztah pro ohybový moment M_o :

$$B \frac{d\varphi}{ds} = R(l - x - \Delta) = M_o ,$$

[46]

a po derivaci podle ds

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{R}{B} \frac{dx}{ds} = -\frac{R}{B} \cos \varphi ,$$

[47]

z čehož po integraci podle $d\varphi$ plyne

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = -\frac{R}{B} \sin \varphi + C .$$

[48]

Integrační konstantu C lze vyjádřit pomocí okrajové podmínky: křivost na volném konci je nulová, jelikož na volném konci působí nulový ohybový moment – viz [8]. Je-li úhel natočení na volném konci značen jako φ_0 , potom platí:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\frac{2R}{B}} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)^{1/2} .$$

[49]

Hodnotu φ_0 nelze přímo zjistit z tohoto výrazu. Jelikož je prodloužení nosníku zanedbatelné, po separaci proměnných z výrazu [49] vzniká:

$$\sqrt{\frac{2R}{B}} \int_0^l ds = \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \left(\frac{R \cdot l^2}{B} \right)^{1/2} .$$

[50]

Nechť $Rl^2/B = \alpha^2$, nyní po zavedení substituce

$$1 + \sin \varphi = 2k^2 \sin^2 \theta = (1 + \sin \varphi_0)$$

[51]

a provedení četných úprav vzniká vztah

$$\alpha = \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta ,$$

[52]

což odpovídá tvaru eliptického integrálu prvního druhu (tvar integrálu získal svůj název díky kontextu, ve kterém se poprvé výrazněji zkoumal – při výpočtu obvodu elipsy), kde

$$\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2k} .$$

[53]

Nyní je třeba vyjádřit posuv p pomocí α a eliptického integrálu. Z geometrie úlohy plyne, že

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \sin \varphi .$$

[54]

Dosazením [49] do [54] vzniká:

$$\frac{dy}{d\varphi} \sqrt{\frac{2R}{B}} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)^{1/2} = \sin \varphi .$$

[55]

Separací proměnných a následnou integrací vyplývá vztah:

$$p = \int_0^y dy = \sqrt{\frac{B}{2R}} \int_0^\varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}} d\varphi .$$

[56]

Použitím stejné substituce jako v [51] vzniká:

$$\frac{p}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2\alpha} \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}} d\varphi = \frac{1}{\alpha} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{2k^2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta .$$

[57]

Tuto rovnici lze rozdělit na součet tzv. úplných a neúplných eliptických integrálů prvního a druhého druhu (tvar eliptického integrálu prvního druhu byl již uveden v rovnici [52], tvar druhého druhu se liší převrácením zlomku uvnitř integrálu, jako úplný eliptický integrál je chápán takový, který má meze od 0 do $\pi/2$, jako neúplný takový, jehož horní mez je jiná než $\pi/2$, úplný eliptický integrál prvního druhu je značen $F(k)$, neúplný $F(k, \theta_1)$, druhý druh obdobně $E(k)$, resp. $E(k, \theta_1)$):

$$\frac{p}{l} = \frac{1}{\alpha} [F(k) - F(k, \theta_1) - 2E(k) + 2E(k, \theta_1)] ,$$

[58]

a

$$\alpha = F(k) - F(k, \theta_1) ,$$

[59]

z čehož plyne, že

$$\frac{p}{l} = 1 - \frac{2}{\alpha} [E(k) - E(k, \theta_1)] .$$

[60]

Horizontální posuv Δ lze vyjádřit z rovnic [46] a [49] s podmínkou, že ve vetknutí nedochází k natočení nosníku, tedy pro $x = 0$ platí $\varphi = 0$. Výsledný vztah je poté

$$R(l - \Delta) = B \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{\varphi=0} = B \sqrt{\frac{2R}{B}} (\sin \varphi_0)^{1/2} ,$$

[61]

nebo

$$\frac{l - \Delta}{l} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \sqrt{\sin \varphi_0} .$$

[62]

Ze substituce [51] vychází vztah mezi natočením volného konce φ_0 a parametru integrálu k :

$$\sin \varphi_0 = 2k^2 - 1.$$

[63]

Jedna z možností, jak získat číselné výsledky, je spočítat k příslušným úhlům natočení konce nosníku φ_0 parametry k dle [63]. Poté je možné pomocí výpočetního softwaru získat hodnoty α z rovnice [59], pro usnadnění výpočtu je v příloze (I.) uvedena tabulka hodnot všech potřebných integrálů pro hodnoty natočení konce nosníku od 1° do 45° (hodnoty aproximované softwarem MATLAB). Následně lze z rovnic [60] a [61] či [62] vyčíslit svislý posuv koncového bodu p , resp. horizontální Δ .

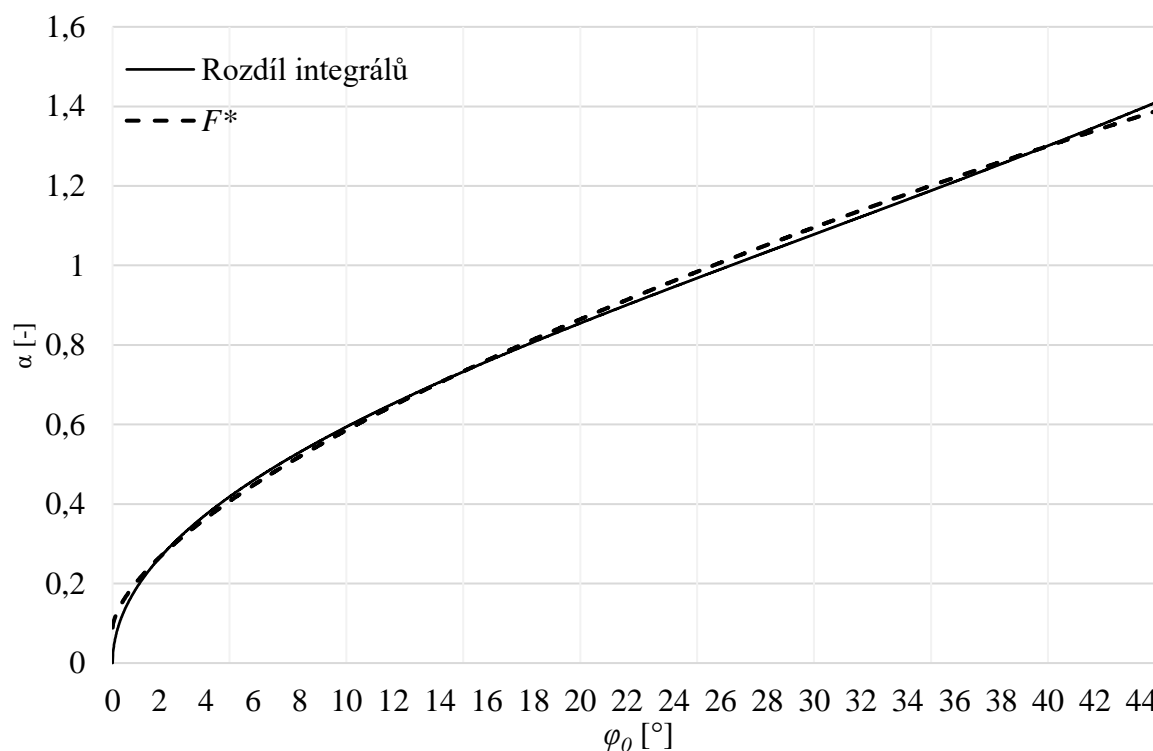
Pro zjištění natočení konce φ_0 přímo z rovnice [59] (za předpokladu znalosti hodnoty α) bez nutnosti zdoluhavého postupného dosazování eliptických integrálů lze průběh hodnot těchto integrálů v závislosti na natočení konce φ_0 poměrně dobře aproximovat pomocí mocninné funkce F^* .

$$F^* = 0,113 \cdot \varphi_0^{0,643} + 0,089$$

[64]

Tato aproximace je poměrně přesná pro hodnoty natočení do 45° vyjma hodnot pro které se úhel natočení blíží k nule. Pro tyto hodnoty však není účelné tuto metodu používat, jelikož je určena právě pro větší deformace. Průměrná chyba této aproximace na úseku od 2° do 45° je 1,2 % a maximální chyba na tomto intervalu je 2,7 %.

V grafu 2 je vykreslen průběh rozdílu hodnot eliptických integrálů a zavedené aproximace F^* v závislosti na úhlu natočení konce φ_0 .



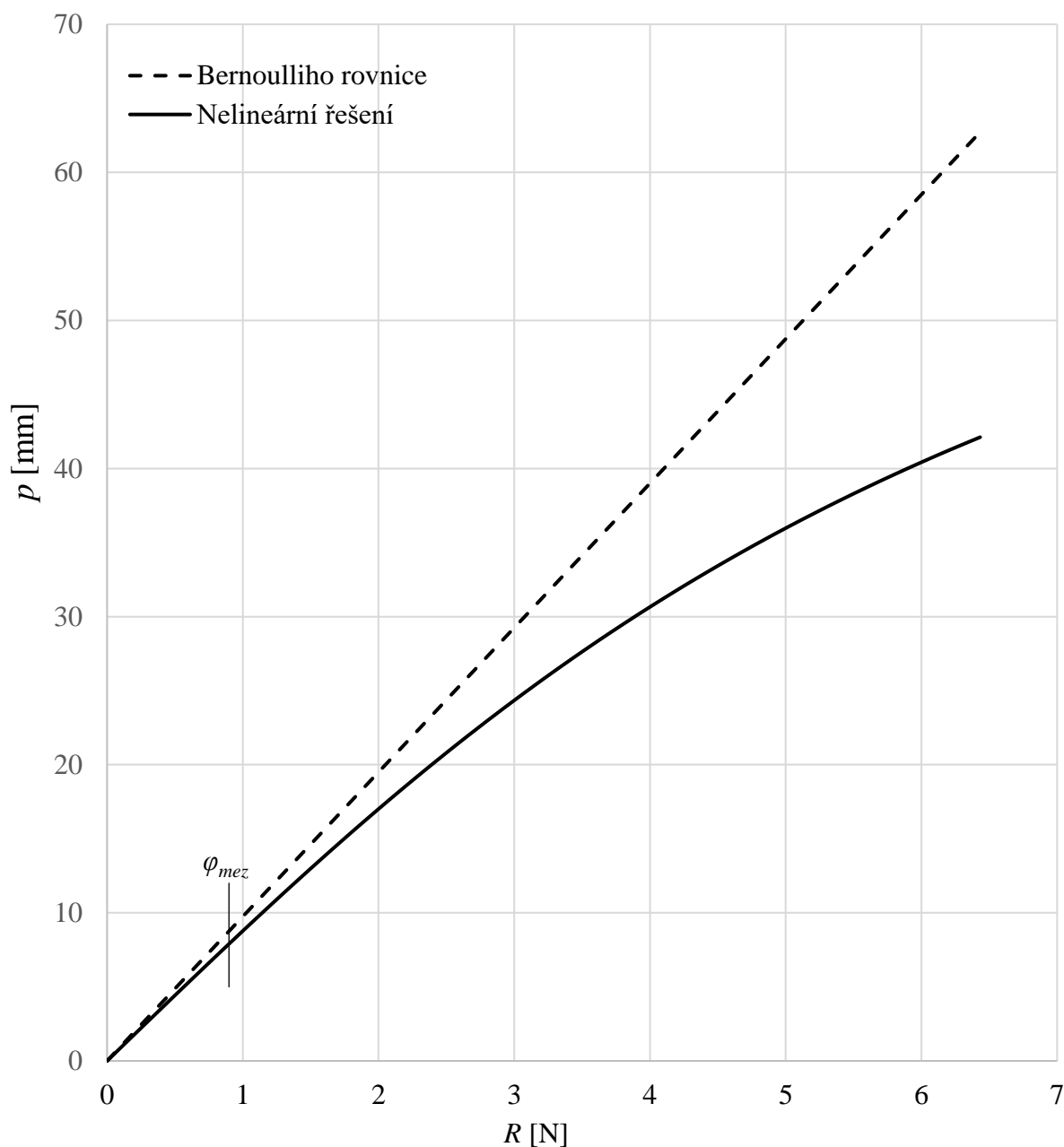
graf 2 – aproximace hodnot eliptických integrálů pomocí mocninné funkce F^*

1.6. Porovnání výsledků analytických řešení

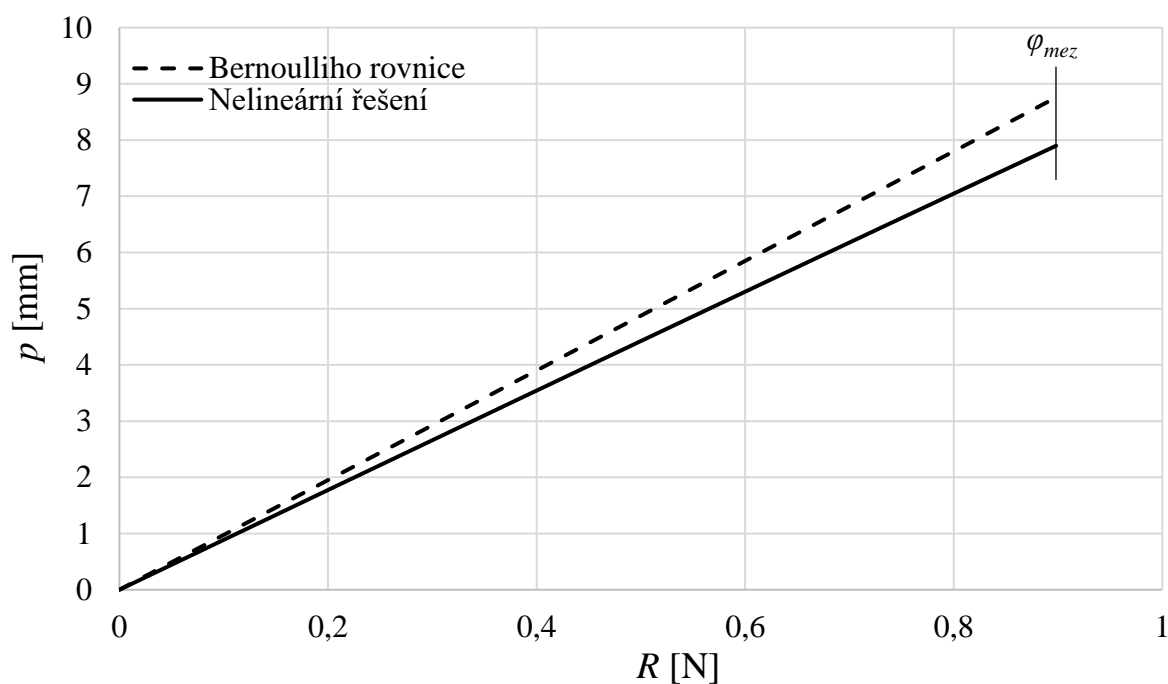
Rozdíly ve výsledcích obou metod budou snadno viditelné z následujících grafů, pro jejichž zhotovení byly použity parametry ohybového snímače posuvu:

Výška	$h = 0,536 \text{ mm}$
Šířka	$b = 7,950 \text{ mm}$
Délka	$l = 85 \text{ mm}$
Young. modul pružnosti	$E = 206 \text{ GPa}$ (hodnota běžných pružinových ocelí – viz (3))

V grafech je také znázorněna hodnota φ_{mez} (poloha odpovídá řešení pomocí eliptických integrálů) odvozená v dřívější kapitole.



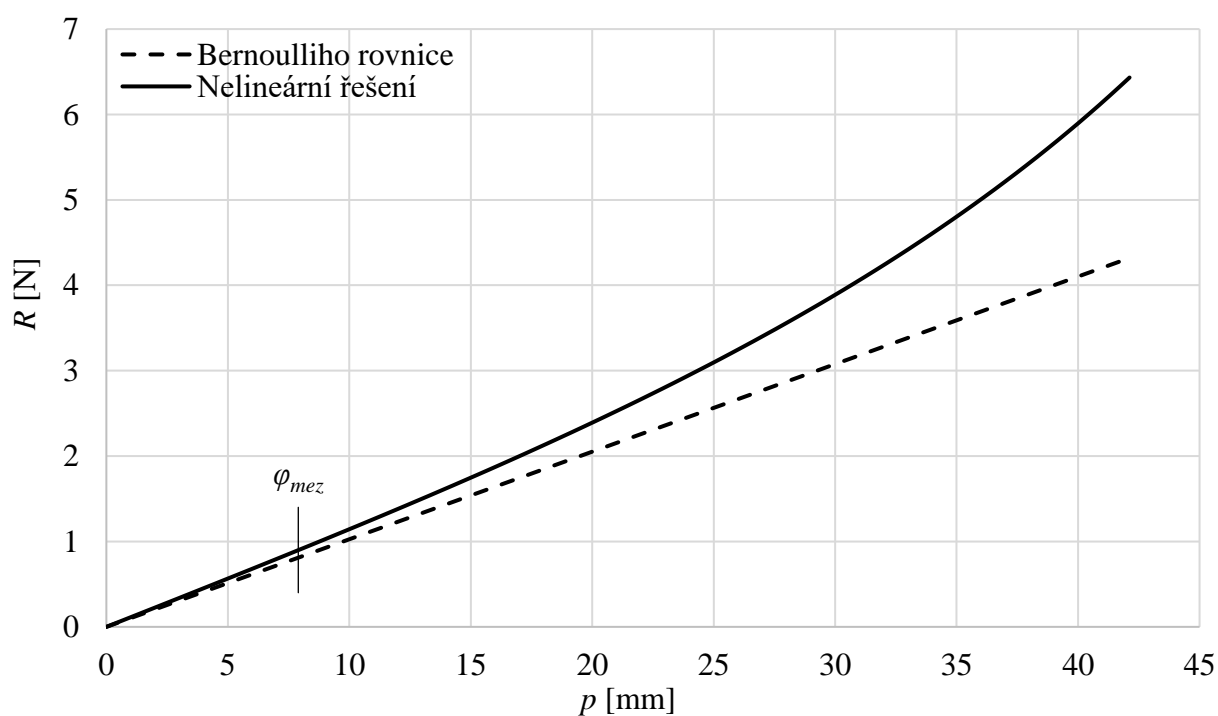
graf 3 – porovnání průběhů posuvů v závislosti na velikosti reakční síly



graf 4 – detail předchozího grafu do úhlu natočení φ_{mez}

Z grafu 3 je zřejmá lineárnost Bernoulliho rovnice, pro hodnoty do φ_{mez} se však i nelineární řešení přímce podobá a od Bernoulliho řešení se příliš neliší – viz graf 4. Linearita Bernoulliho řešení indikuje jeho nepoužitelnost pro řešení větších deformací, jelikož posuv koncového bodu začne pro vyšší síly R vycházet větší, než je samotná délka nosníku l a roste k nekonečnu.

Velikost reakční síly působící na volný konec nosníku v závislosti na jeho svislém posuvu znázorňuje následující graf:



graf 5 – porovnání průběhu velikostí reakční síly v závislosti na posuvu

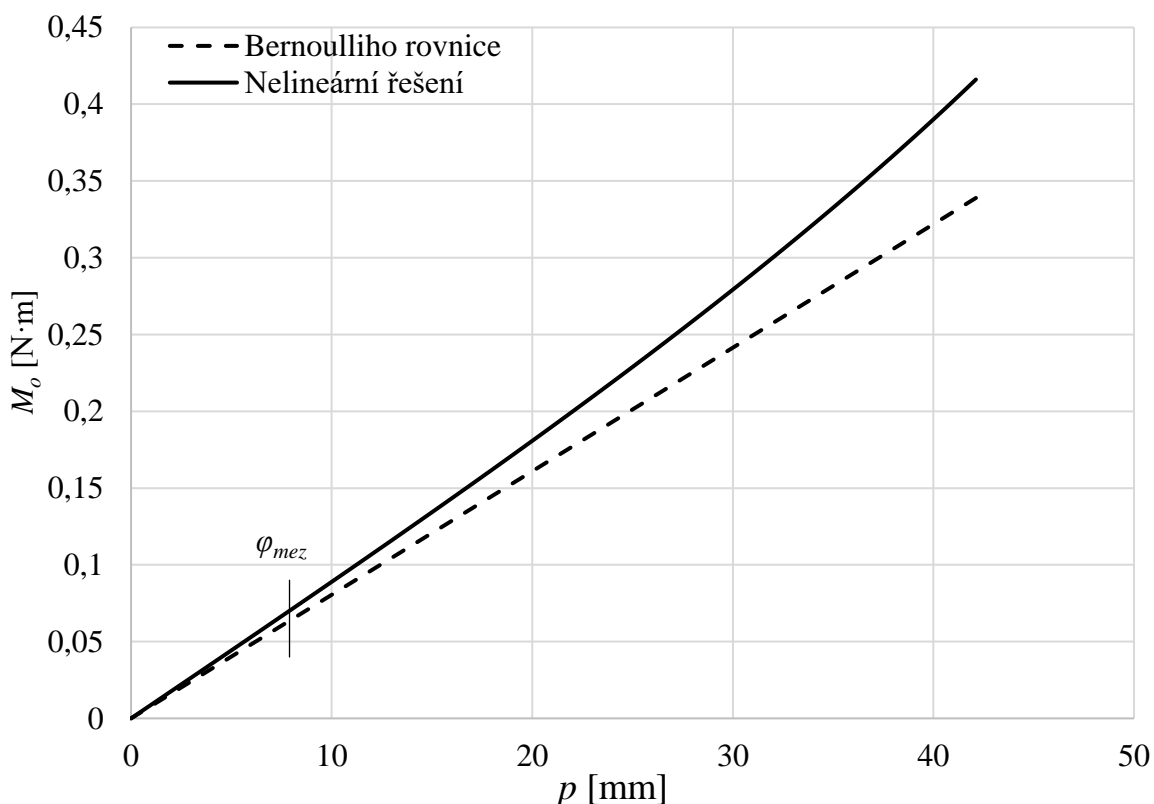
Reakční síla při řešení s eliptickými integrály roste nelineárně s rostoucím posuvem p (se kterým roste i natočení konce φ_0 a tudíž i parametr integrálu k), což je v souladu s rovnicí [59] a s vývojem hodnot eliptických integrálů prvního druhu v tabulce hodnot (viz příloha (I.)). Opakuje se, že do hodnoty φ_{mez} jsou obě řešení velice podobné, i nelineární řešení připomíná pro takto malé deformace přímku.

Při řešení ohybového momentu M_o v místě, kde jsou umístěny tenzometry nastává komplikace, jelikož metoda eliptických integrálů nezanedbává horizontální posuv bodů na nosníku, což mění rameno působící síly, a tudíž i ohybový moment. Pro zjištění velikosti ohybového momentu v místě jiném, než ve vetknutí (tzn. pro $x = 0$), je však potřeba znát pro určení ramene, na kterém síla působí, jak horizontální posuv koncového bodu nosníku (působíště síly), tak i horizontální posuv místa tenzometrů.

Pro polohu tenzometru bude tedy vzhledem k jeho blízké poloze k vetknutí předpokládáno, že jeho horizontální poloha se téměř nemění. S většími deformacemi bude tedy toto řešení zatěžováno větší chybou. Posuv působíště síly Δ však zanedbán nebude. Vzdálenost tenzometru od vetknutí x_T je 6,54 milimetrů, ohybový moment M_o v tomto místě je tedy:

$$M_o = P(l - \Delta - x_T)$$

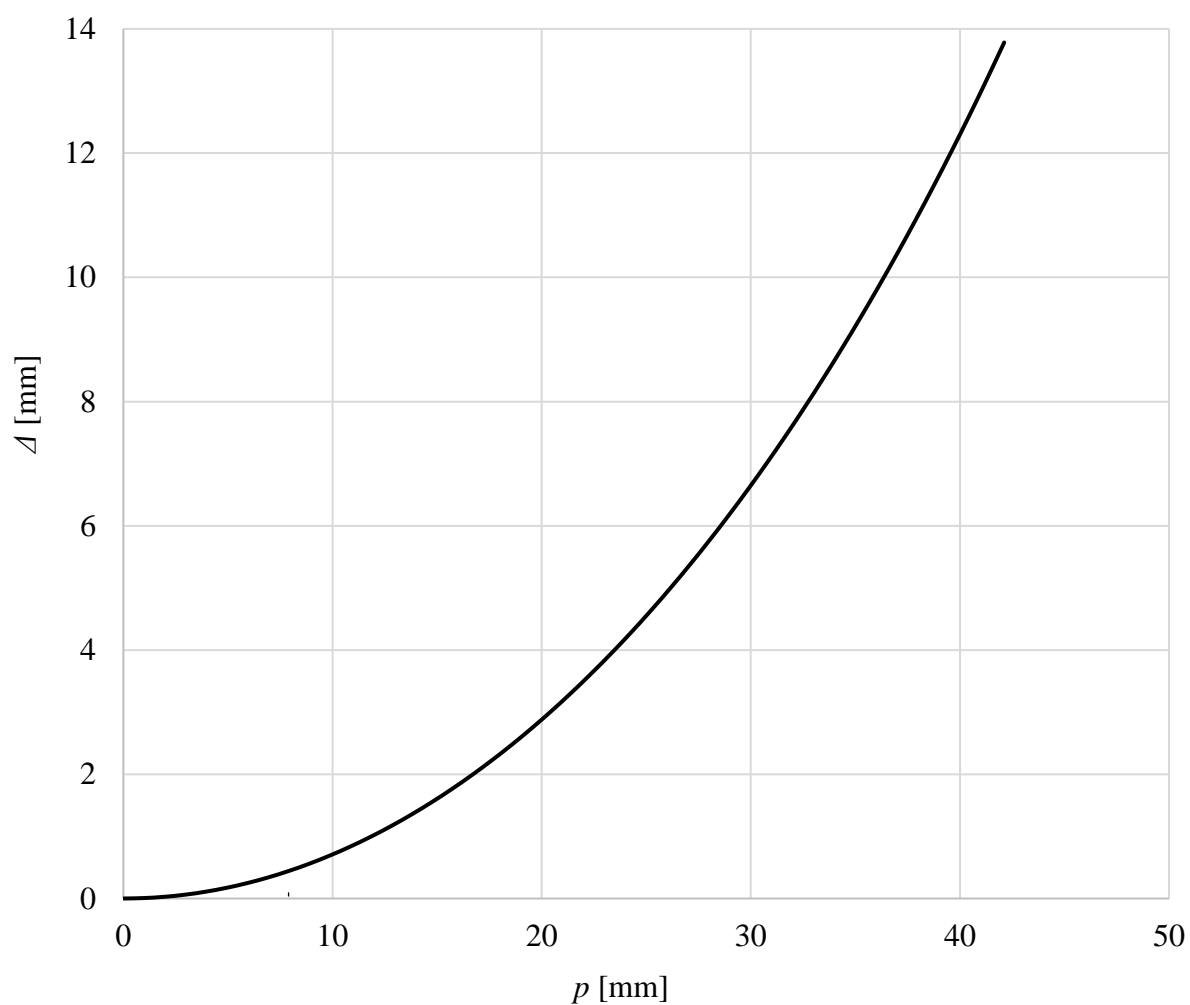
[65]



graf 6 – porovnání průběhů vnitřního ohybového momentu v závislosti na posuvu

Velikost ohybového momentu u nelineárního řešení roste s posuvem p pomaleji než reakční síla R , což je způsobeno tím, že proti rostoucí síle R roste i protichůdný horizontální posuv Δ , který růst ohybového M_o „brzdí“.

Zajímavý může být i vývoj hodnoty vodorovného posuvu Δ v závislosti na svislém posuvu p . Tato závislost může být například využita pro polohování snímače před měřením tak, aby při větším posuvu p volný konec snímače z měřeného objektu nesklouzl.



graf 7 – vývoj vodorovného posuvu Δ v závislosti na svislém posuvu p

2. PRAKTICKÁ ČÁST

2.1. Popis experimentu

Na ohybovém snímači jsou tenzometry zapojeny do $\frac{1}{2}$ Wheatstoneova můstku. Toto zapojení zaručuje teplotní kompenzaci během měření, a také dvojnásobnou citlivost při ohybu. Měřicí tenzometry byly umístěny tak, aby jeden snímal napětí na straně namáhané na tlak a druhý naopak. Celý přípravek byl připevněn k polohovatelnému rameni, které zaručovalo minimální pohyb vetknuté části snímače.

Posuv byl zajištěn kalibrátorem extenzometrů, který lze popsat jako přesnější mikrometr.

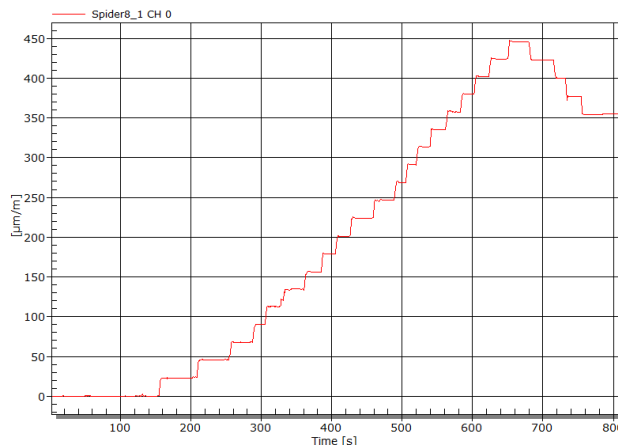


obr. 14 - experiment

Hodnoty snímané tenzometrem byly zaznamenávány pomocí ústředny Spider8 a softwaru catman Easy od společnosti HBM.

Změna odporu na tenzometrech byla automaticky převáděna na poměrnou deformaci ε . Svislá poloha konce snímače byla nastavována od 0 mm (snímač není namáhán) do 25 mm s krokem 1 mm. Po dosažení posuvu 25 mm byl snímač opět s krokem 1 mm odlehčován až do jeho úplného narovnání. Takto bylo měření provedeno celkem třikrát. Naměřené hodnoty pro ε byly následně pro příslušné hodnoty posuvu zprůměrovány.

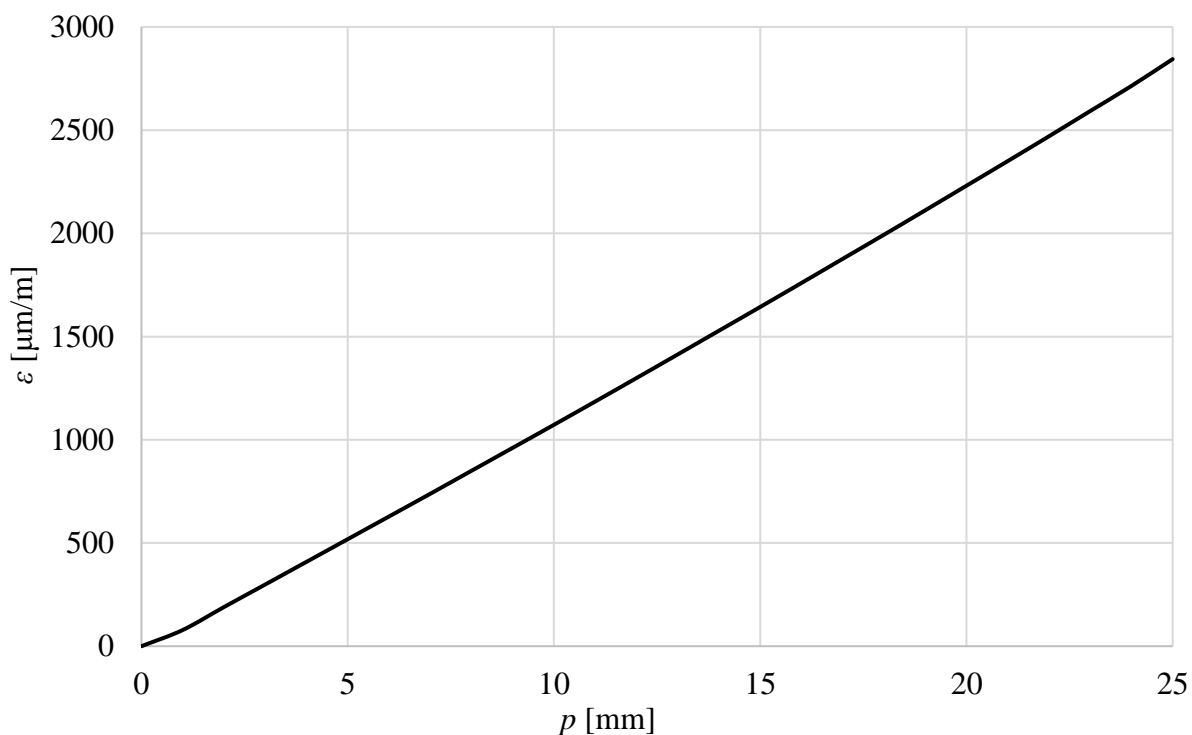
355.320 μm
Spider8_1 CH 0



obr. 15 – ukázka měření v prostředí softwaru catman Easy, na svislé ose je deformace ε [$\mu\text{m}/\text{m}$], posuv p byl odečítán na kalibrátoru

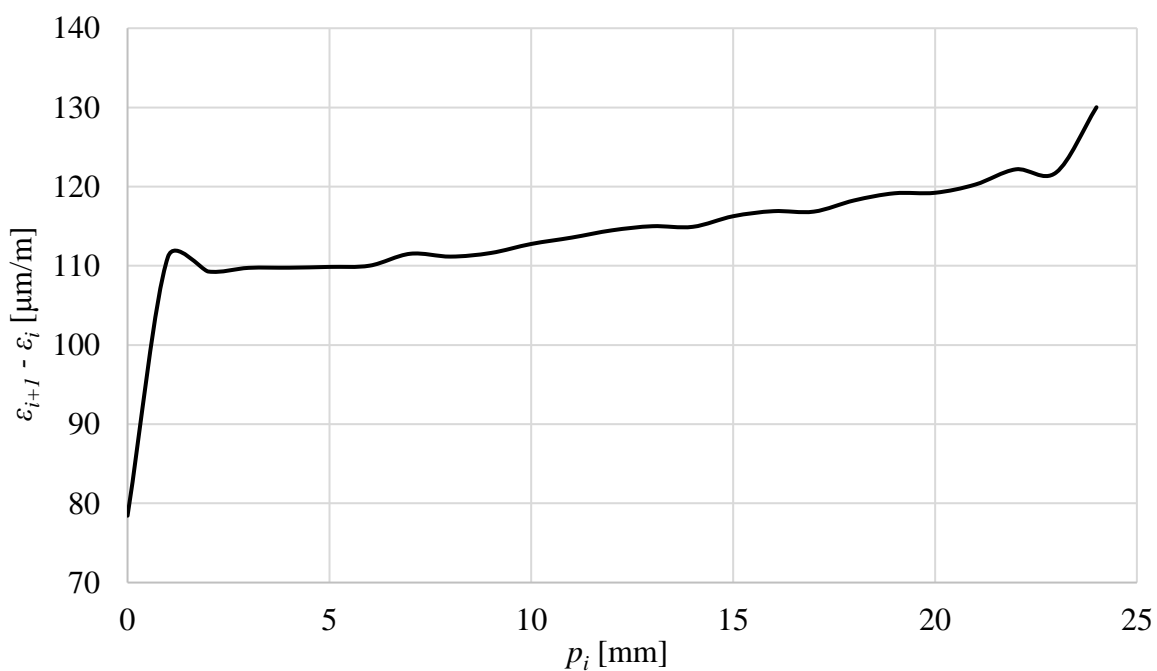
2.2. Porovnání experimentu a analytických řešení

Graf 8 zobrazuje naměřené hodnoty poměrné deformace ε v závislosti na posuvu p .



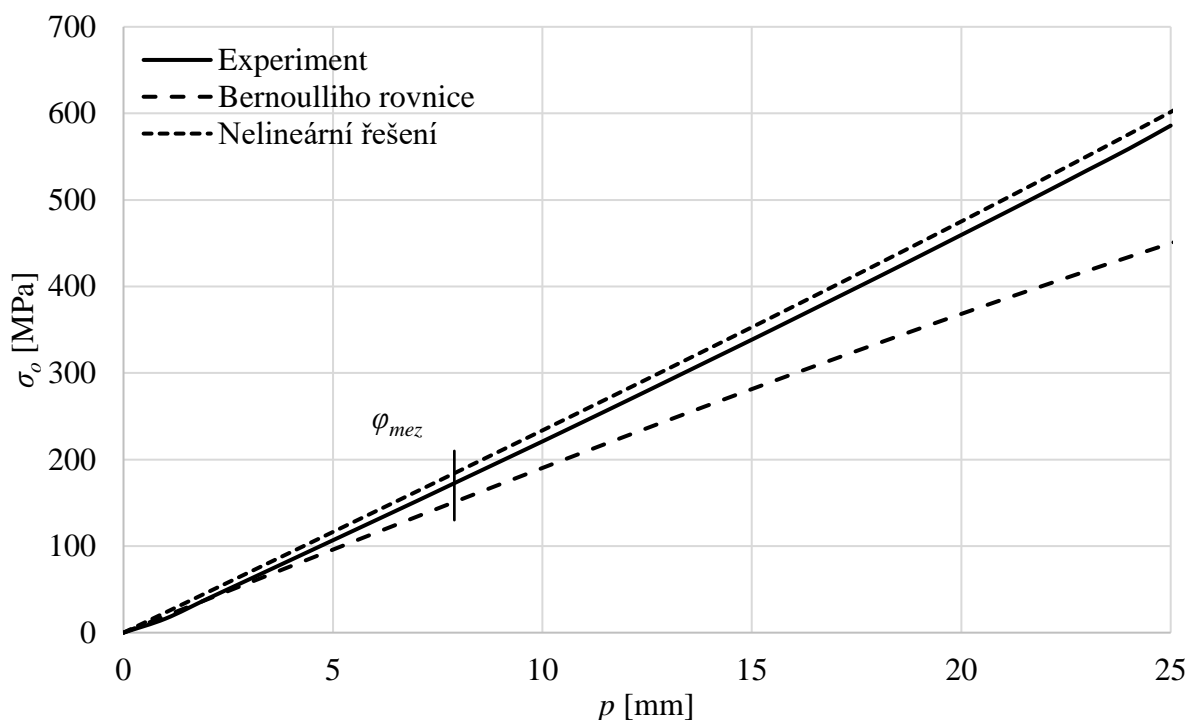
graf 8 – naměřené hodnoty deformace v závislosti na posuvu

Z grafu 8 se jeví být závislost deformace ε na posuvu p lineární, analýzou naměřených dat lze však sledovat růst rozdílu po sobě jdoucích hodnot ε . Tato skutečnost nasvědčuje tomu, že Bernoulliho rovnice nemůže být kvůli své linearitě pro větší deformace dostatečně přesná.



graf 9 – vývoj přírůstku naměřených hodnot

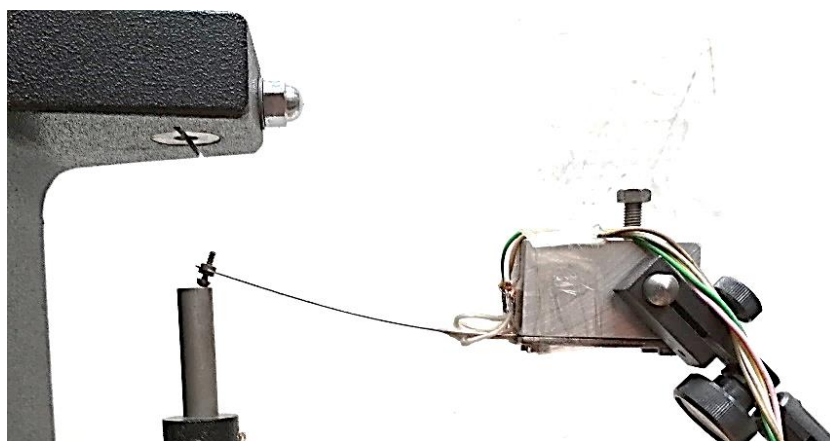
Z naměřených hodnot ε lze dopočítat vzniklé ohybové napětí σ_o pomocí Hookova zákona pro jednoosou napjatost. V grafu jsou pro srovnání zobrazeny i hodnoty získané pomocí dříve odvozených analytických metod.



graf 10 – porovnání napětí z experimentu a analytických řešení

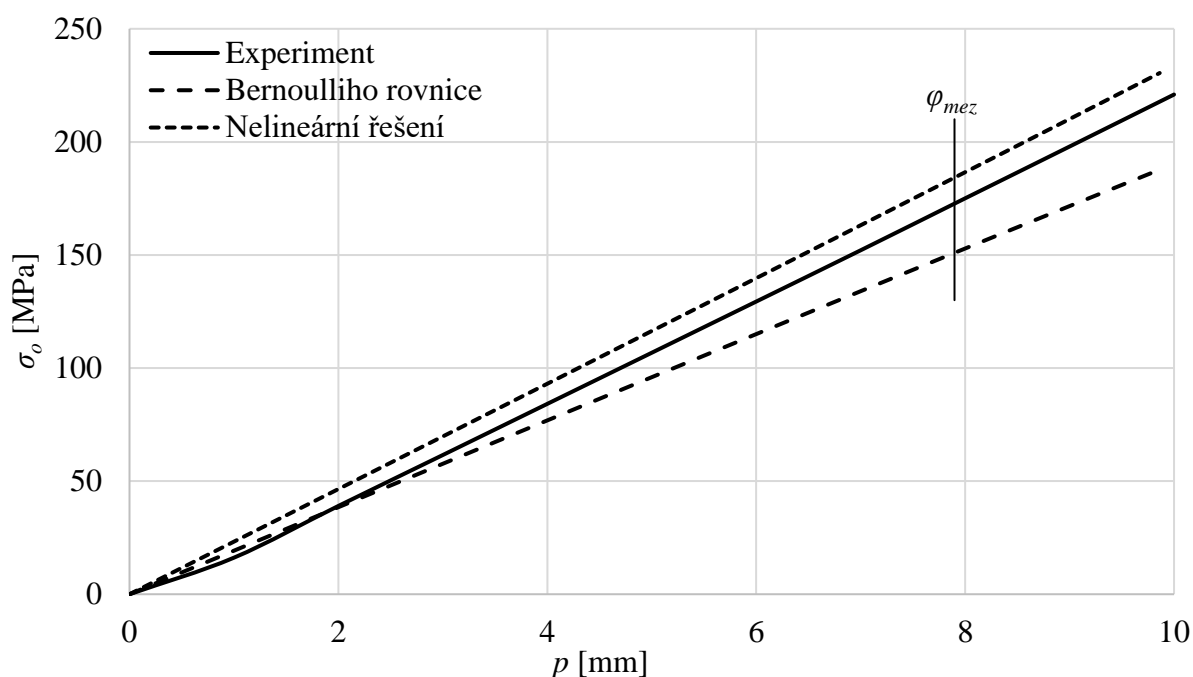
Z grafu 10 je zřejmé, že pro takto velké hodnoty deformací se Bernoulliho rovnice s experimentem rozchází, zatímco výsledky nelineární metody se s experimentem shodují velice dobře. Odchylka nelineární metody se zde pohybuje do maximální hodnoty 4 %.

Na první pohled se jeví být dosažené hodnoty ohybového napětí σ_o poměrně extrémní a nabízí se tak otázka, zda během experimentu nemohlo dojít ke zplastizování materiálu. Ač nejsou známy přesné hodnoty materiálových konstant použité pružinové oceli, lze předpokládat, že ke plastizaci materiálu nedošlo. Pružinová ocel se vyznačuje právě vysokou mezí kluzu σ_k , což je nutná vlastnost pro odolání plastizaci při velikých deformacích, které se u pružin očekávají. Hodnoty σ_k pro pružinové oceli bývají na rozdíl od běžných konstrukčních ocelí v rozmezí mezi 800 až 1100 MPa - viz (3).



obr. 16 – snímač při posuvu 25 milimetrů

V grafu 11 je přibližná oblast od počátku do posuvu odpovídajícímu úhlu natočení konce snímače φ_{mez} .

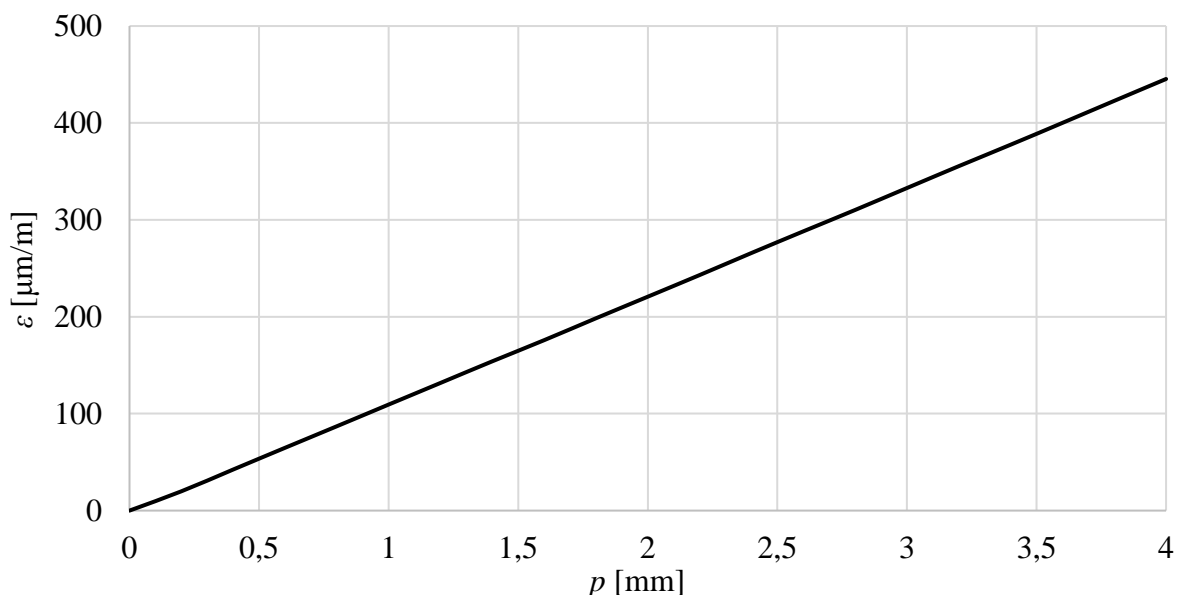


graf 11 – detail předchozího grafu v oblasti do úhlu natočení konce φ_{mez}

I zde se na většině intervalu jeví být přesnější nelineární metoda oproti Bernoulliho rovnici. Problematická je však oblast na samotném počátku, kde více odpovídá naměřeným hodnotám Bernoulliho rovnice. Zde lze také pozorovat nelinearitu experimentálních hodnot. Právě v této oblasti se předpokládá téměř lineární růst σ_o a výsledná nelinearita je v tomto případě pravděpodobně způsobena nevhodným způsobem měření pro tuto oblast. Pro řádné posouzení oblasti těchto malých deformací bylo měření opakováno (viz dále). Další nepřesnost měření, která mohla způsobit zkreslení hodnot, je poměrně obtížné nastavení počáteční nulové hodnoty posuvu. Tomu zřejmě nasvědčuje i prudký skok přírůstků hodnot (viz graf 8), který je nejspíše způsoben tím, že rozdíl naměřených posuvů p mezi 0 mm až 1 mm zcela neodpovídá skutečnému posuvu.

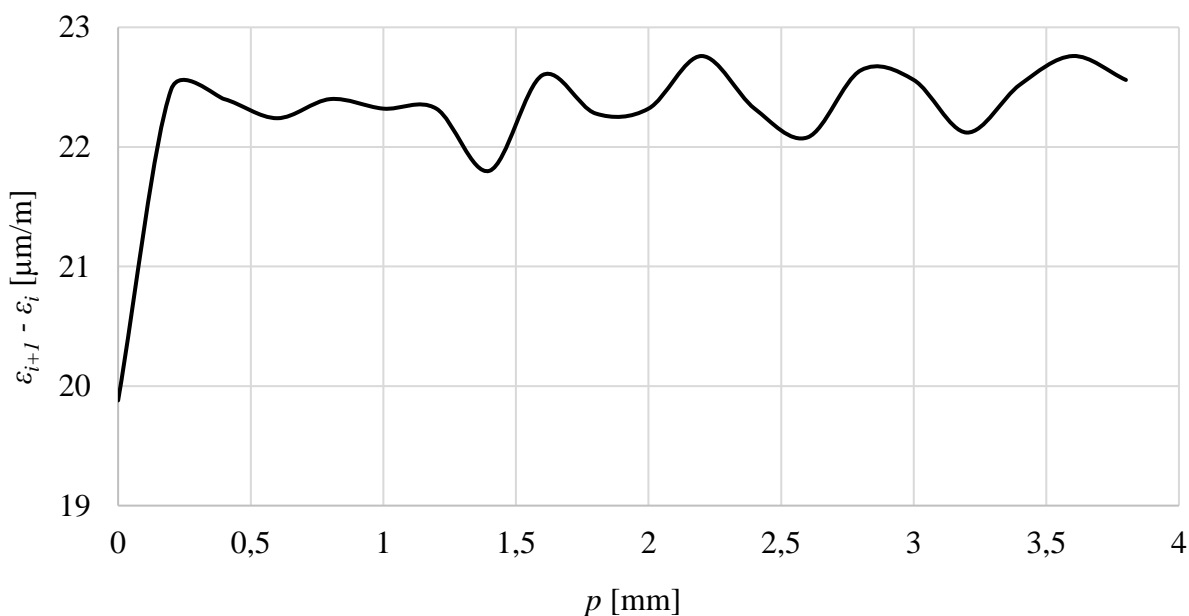
Měření bylo s ohledem na neuspokojivé dosažené výsledky pro menší posuvy zopakováno. Bylo provedeno prakticky stejně, ovšem pouze do posuvu 4 mm s krokem 0,2 mm (první měření bylo provedeno do posuvu 25 mm s krokem 1 mm), a se zvýšenou pozorností k nastavení nulové počáteční hodnoty posuvu p .

Graf 12 zobrazuje nově naměřené hodnoty deformace ε v závislosti na posuvu p .



graf 12 – získané hodnoty z druhého měření

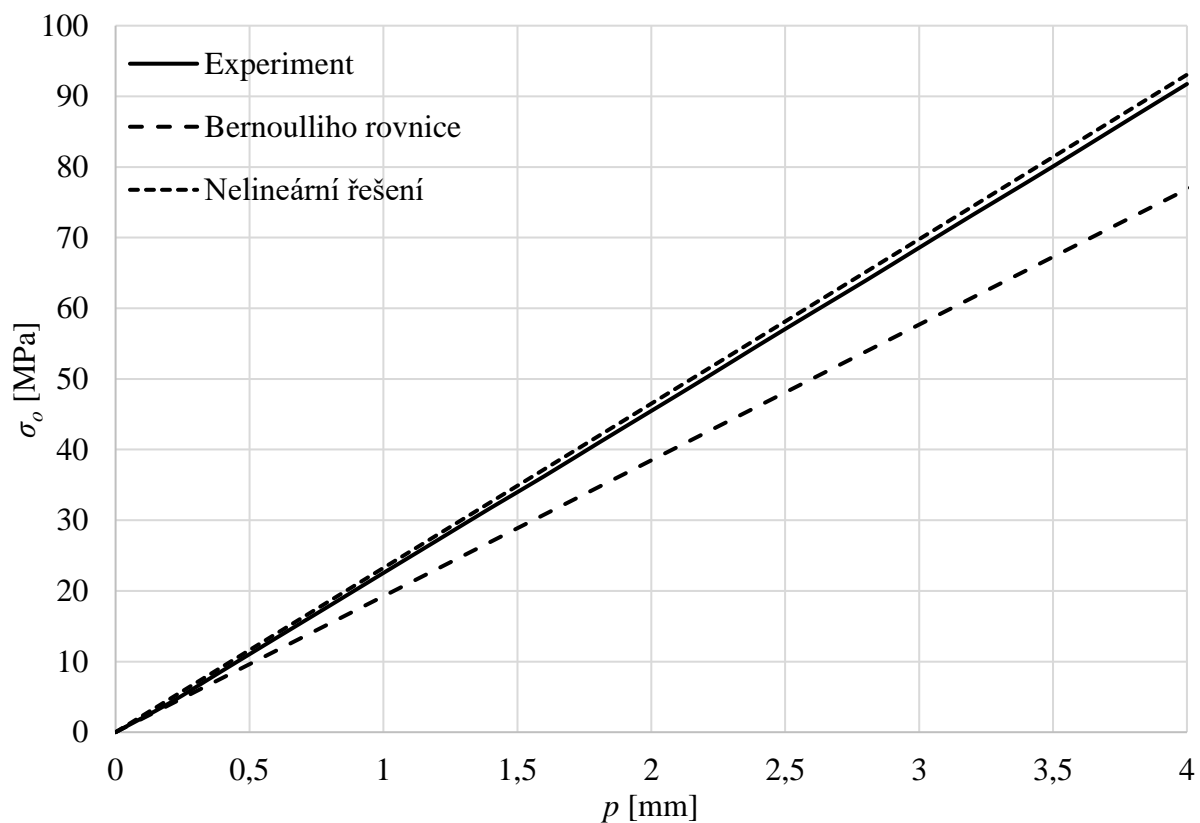
Pro zhodnocení linearity (v této oblasti se očekávají hodnoty téměř lineární) následuje opět graf přírůstku deformace ε v závislosti na posuvu p .



graf 13 – průběh hodnot přírůstku v závislosti na posuvu p z druhého měření

Počáteční skok hodnoty se zde jeví být méně výrazný než při předešlém měření, což naznačuje, že počáteční nulová hodnota posuvu zde byla nastavena přesněji, než při předchozím experimentu. U po sobě jdoucích hodnot není patrný výrazný růst přírůstku, lze tedy říci, že je zde závislost deformace ε na posuvu p přibližně lineární.

Graf 14 zobrazuje experimentálně a analyticky získané hodnoty ohybového napětí σ_o v závislosti na posuvu p .



graf 14 – závislost σ_o na posuvu p s hodnotami z experimentu zaměřeným na oblast malých deformací

Navzdory očekávání se i zde, v oblasti malých deformací (natočení φ_{mez} odpovídá až posuvu téměř 8 mm), hodnoty získané pomocí Bernoulliho rovnice jeví být značně vzdálené od experimentálních dat – rozdíl zde s posuvem p poměrně rychle roste. Hodnoty získané nelineární metodou jsou oproti tomu blízko experimentálním hodnotám a jejich grafy téměř splývají. Odchylka nelineární metody se v oblasti do 2 mm pohybuje řádově kolem 1,5 %, dále už jen kolem desetin procenta.

Další faktor, který mohl způsobit rozdíly mezi analyticky získanými hodnotami a experimentem, je fakt, že vektor vzniklé reakční síly na konci planžety nemusí být ve skutečnosti dokonale svislý. Nelze totiž docílit perfektního bodového styku, pro který by bylo nutné, aby na konci planžety byla dokonalá kulová plocha. V případě použitého šroubu na konci planžety lze předpokládat, že výsledná reakční síla se od pomyslné svislé osy bude s rostoucí deformací odklánět, na rozdíl od analytických řešení, kde byl vektor uvažované reakční síly stále svislý.

Nepřesnosti mohou být také způsobeny vzdáleností hlavy šroubu od samotné planžety. Vzniklá reakční síla je kvůli tomu dále odchýlená od pomyslného bodu dotyku, který leží přímo na planžetě, což opět způsobuje rozdíl mezi ohybovým momentem dle analytického řešení a skutečným vzniklým ohybovým momentem. V ideálním případě je hlava šroubu co nejbližší samotné planžetě, nesmí ale dojít k opření planžety o zkoumané těleso. Tomu lze také zamezit umístěním snímače do takové polohy, ve které bude co nejkratší část planžety přecházet do dráhy zkoumaného deformovaného objektu.



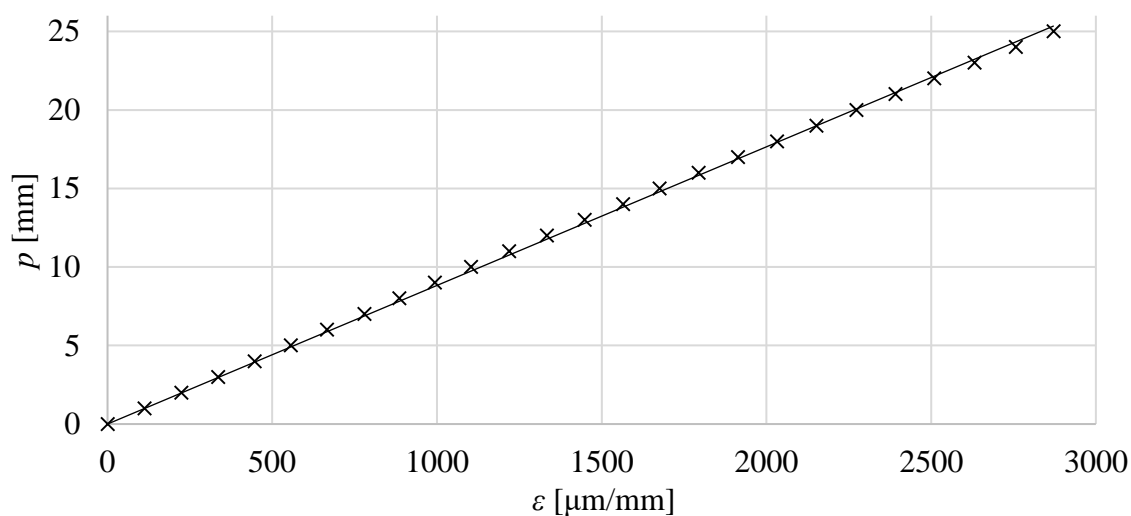
obr. 17 – detail snímače při maximálním dosaženém posuvu 25 mm

2.3. Zhodnocení experimentu

Měření lze i přes drobné nedostatky (např. obtížně nastavitelný počátek) hodnotit jako zdařilé. Analytické metody se v porovnání s experimentálně získanými hodnotami chovaly dle očekávání. Navržená zlepšení přesnosti měření po zkušenostech z již provedeného měření jsou zajištění co nejpřesnějšího nastavení počáteční nulové polohy měření (například výrobou jednoduššího a pevnějšího přípravku pro uchycení snímače, než jaký byl použit), a také zhotovení nového snímače z materiálu, pro který jsou známy hodnoty E a σ_k .

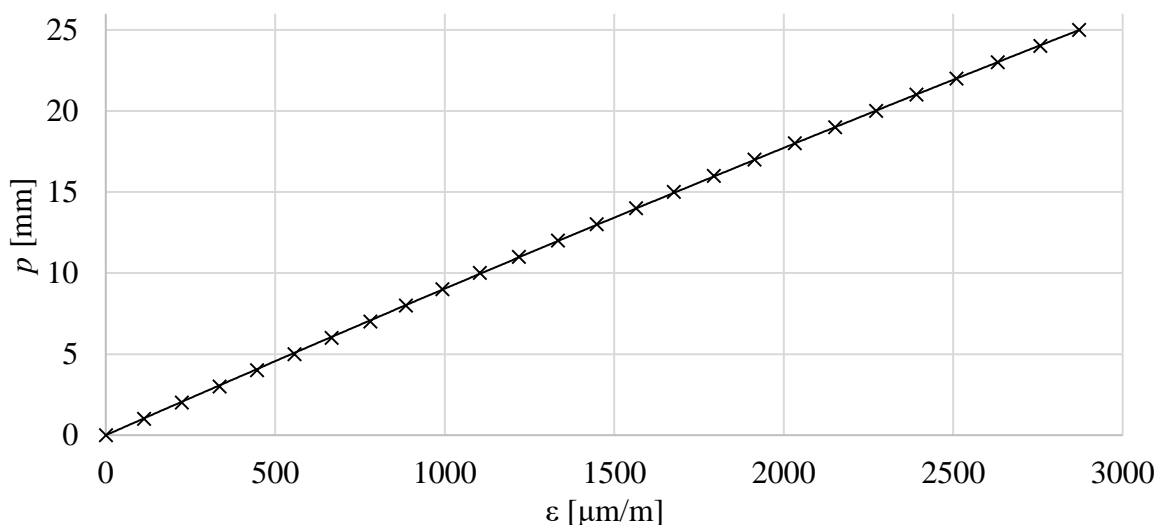
Zhodnocení 1. měření

Aproximací kalibrační křivky přímkou je dosaženo poměrně dobré přesnosti s průměrnou odchylkou 1,46 % a maximální odchylkou 2,92 %.



graf 15 – aproximace přímkou

Aproximací kalibrační křivky polynome 2. stupně je dosaženo průměrné odchylky 0,65 % a maximální odchylky 3,13 %. Největší rozdíly se zde objevují pro posuv do 7 mm. Pro posuvy větší než 7 mm se odchylka pohybuje okolo 0,2 %.



graf 16 – aproximace polynome 2. stupně

O tom, zda použít přímku či polynom pro vyhodnocení naměřených hodnot je tedy vhodné rozhodnout na základě očekávaných hodnot průhybu – pro větší průhyby je vhodnější použít polynom než přímku, a naopak pro menší průhyby je vhodnější přímka.

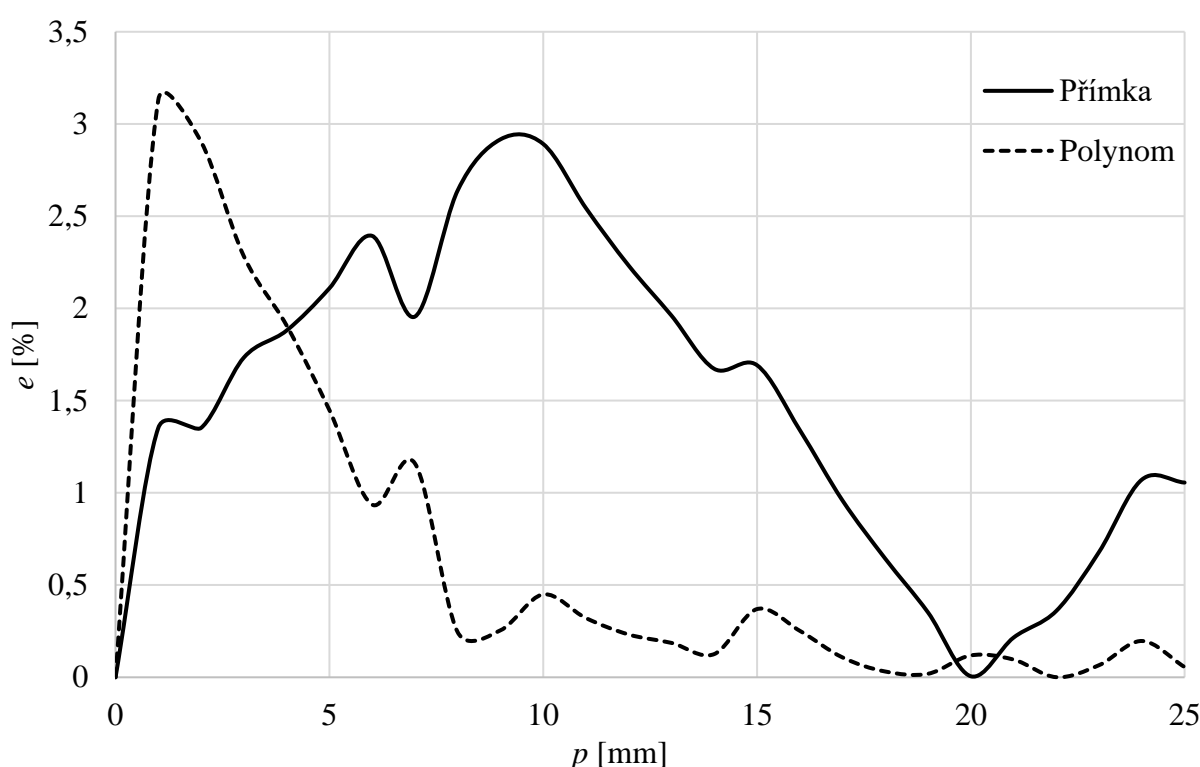
$$y_{lin} = 0,0088 \cdot x$$

[66]

$$y_{poly} = -1,8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 9,22 \cdot 10^{-3} \cdot x$$

[67]

Graf 17 zobrazuje průběh velikosti odchylky e obou aproximací v závislosti na velikosti posuvu p . Z něj je patrné, že pro posuvy p větší než přibližně 4 mm je vhodnější použít polynom.

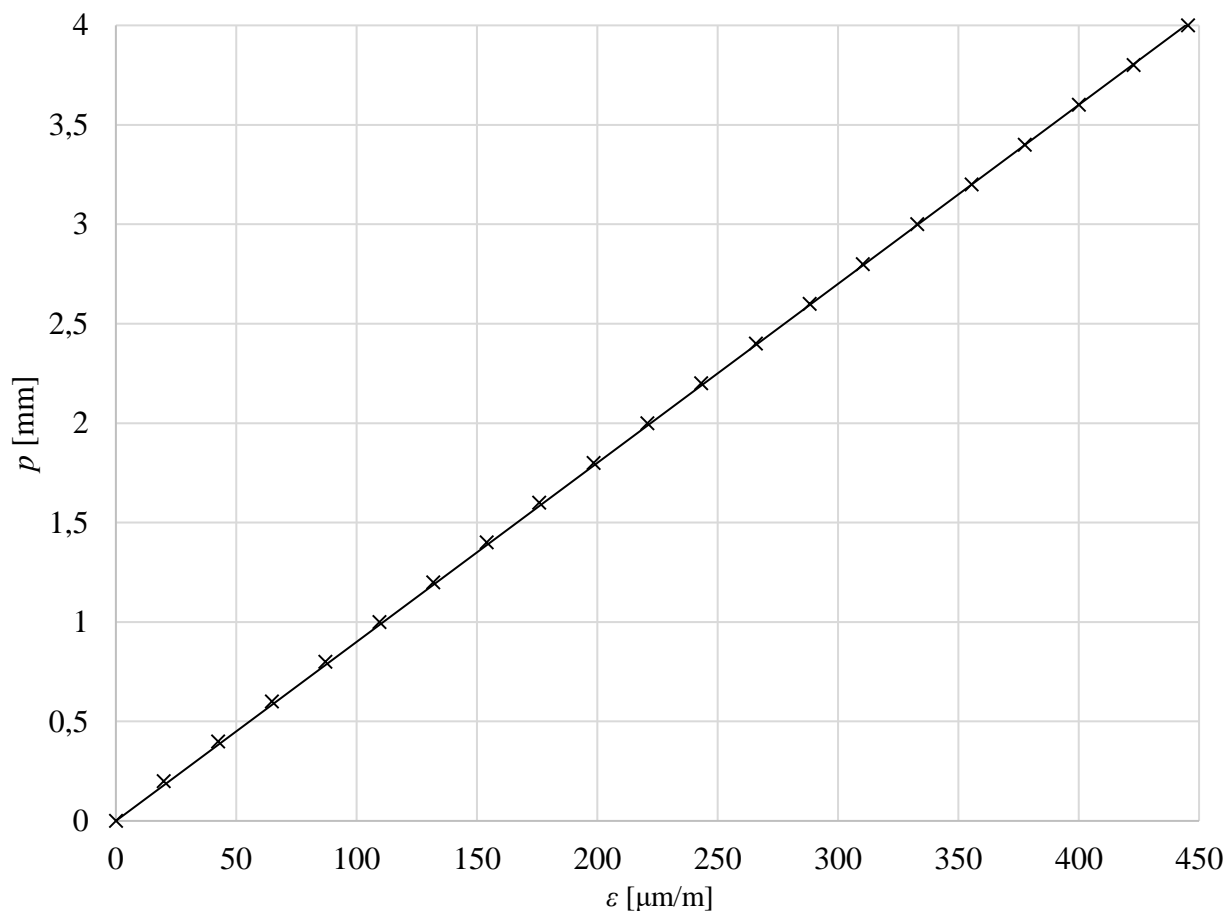


graf 17 – vývoj chyby u obou aproximací

Dále je v příloze (II.) uvedena kalibrační křivka pro manuální odečítání hodnot posuvu p z grafu.

Zhodnocení 2. měření

Kalibrační křivku je zde s ohledem na lineární průběh hodnot ε vhodné aproximovat přímkou.



graf 18 – aproximace hodnot získaných při druhém měření přímkou

Odchylka se zde až na hodnoty u úplného počátku pohybuje kolem desetin procenta. Větší chyby na počátku (u posuvu 0,2 mm až 10 %) jsou nejspíše způsobeny již dříve zmíněným obtížným nastavením počáteční nulové hodnoty posuvu. Průměrná odchylka na intervalu posuvu od 1 do 4 mm je 0,52 %, maximální odchylka na tomto intervalu je 1,54 %.

Rovnice použité přímky y^* je následující:

$$y^* = 0,009 \cdot x .$$

[68]

V příloze (III.) je uvedena kalibrační křivka pro manuální odečítání hodnot posuvu p z grafu.

Celkově se jako nejvhodnější způsob měření pomocí ohybového snímače jeví snímač předepnout, aby se při měření hodnoty nepohybovaly kolem počátku, kde je odečítání hodnot problematické a zatížené největší chybou.

ZÁVĚR

V práci bylo zkoumáno chování ohybového snímače posuvu při jeho deformaci pomocí analytických řešení a experimentu.

Pro početní řešení byla odvozena Bernoulliho rovnice a vzhledem k velkým dosahovaným deformacím u snímače i nelineární řešení, které využívá eliptické integrály. Hodnoty získané pomocí Bernoulliho rovnice byly dle očekávání blízko experimentálním hodnotám pouze v oblasti velmi malých deformací. Naproti tomu byly výsledky získané díky nelineárnímu řešení téměř shodné s experimentem. Výsledky obou metod byly mezi sebou porovnány.

Jednou z motivací k hlubšímu zkoumání ohybového snímače bylo rozšíření jeho oblasti využitelnosti. Právě proto byl snímač kromě oblasti malých deformací (posuv volného konce do 4 mm) zkoumán i při poněkud extrémnějším namáhání, kdy bylo dosaženo posuvu až 25 mm. Pro oba případy bylo provedeno samostatné měření. Z dat získaných při těchto experimentech byly odvozeny kalibrační křivky závislosti posuvu konce snímače na poměrném prodloužení.

Chování ohybového snímače bylo popsáno v závislosti na velikosti měřené deformace. Analytické i experimentální popisy byly mezi sebou porovnány s uvedením použitelnosti jednotlivých metod. Tímto byl stanovený cíl bakalářské práce splněn.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

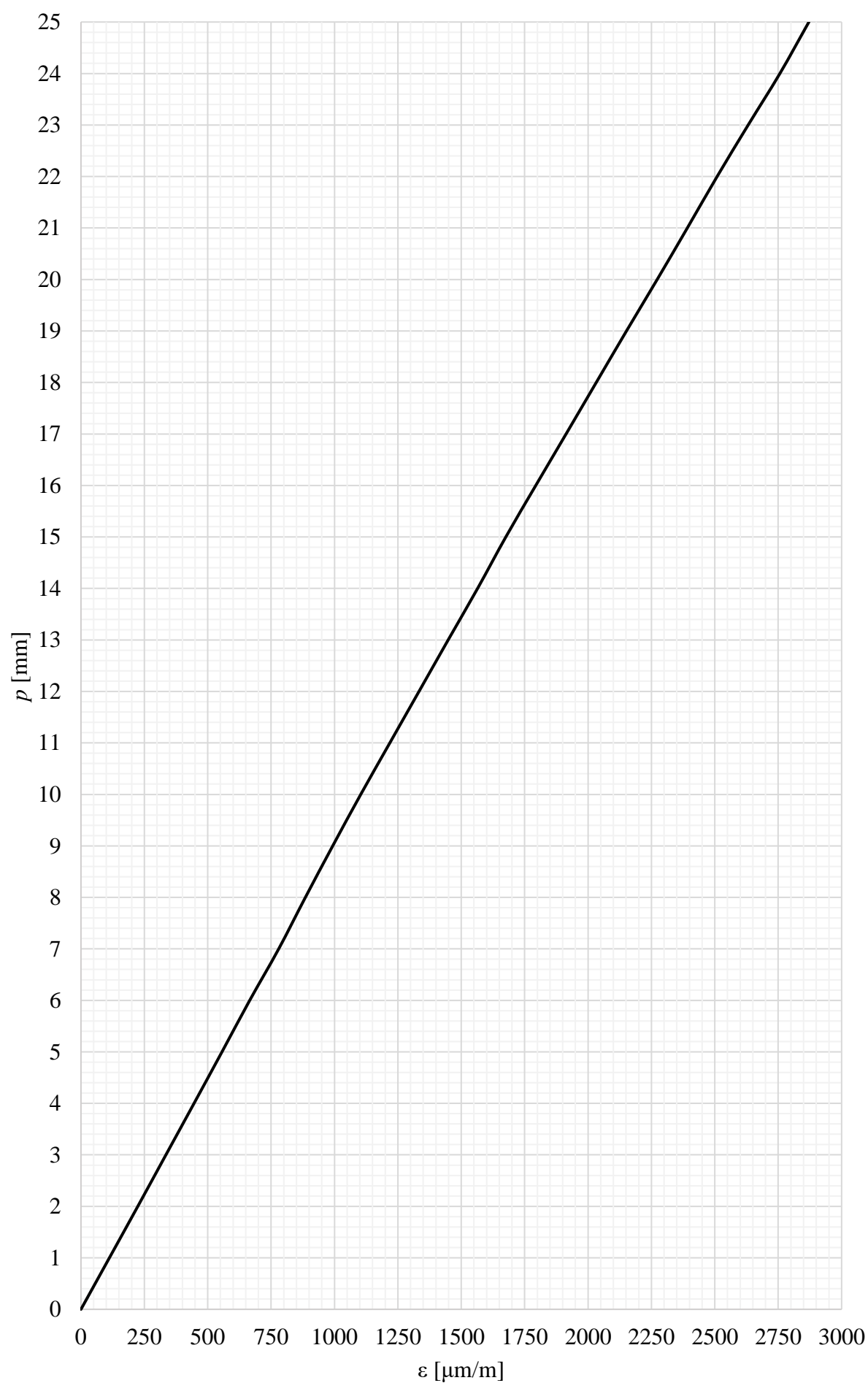
- (1) TIMOSHENKO, S. *Strength of materials*. 3rd ed. Malabar, Fla: Krieger Pub. Co, 1983. ISBN 0898746213.
- (2) GERE, James M. *Mechanics of materials*. 6th ed. Belmont, CA: Brooks/Cole-Thomas Learning, c2004. ISBN 0-534-41793-0.
- (3) YAMADA, Y. *Materials for springs*. Tokyo: Japan Society of Spring Engineers, c2007. ISBN 978-3-540-73811-4.
- (4) BISSHOPP, K. E. a D. C. DRUCKER. Large deflection of cantilever beams. *Quarterly of Applied Mathematics* [online]. 1945, 3(3), 272-275 [cit. 2018-04-18]. DOI: 10.1090/qam/13360. ISSN 0033-569X.
- (5) MICHALEC, Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04224-3.

PŘÍLOHY

(I.) Tabulka hodnot eliptických integrálů

φ_0 [°]	k	$F(k)$	$F(k, \theta_1)$	$E(k)$	$E(k, \theta_1)$
1	0,7133	1,8615	1,6747	1,3462	1,2539
2	0,7193	1,8691	1,6049	1,3418	1,2127
3	0,7254	1,8769	1,5531	1,3374	1,1811
4	0,7314	1,8848	1,5108	1,3329	1,1546
5	0,7373	1,8929	1,4745	1,3284	1,1314
6	0,7431	1,9011	1,4425	1,3238	1,1105
7	0,7490	1,9095	1,4138	1,3193	1,0916
8	0,7547	1,9180	1,3877	1,3147	1,0742
9	0,7604	1,9267	1,3637	1,3101	1,0580
10	0,7660	1,9356	1,3414	1,3055	1,0429
11	0,7716	1,9446	1,3208	1,3009	1,0288
12	0,7771	1,9539	1,3014	1,2963	1,0154
13	0,7826	1,9633	1,2832	1,2916	1,0028
14	0,7880	1,9729	1,2661	1,2870	0,9908
15	0,7934	1,9827	1,2498	1,2823	0,9794
16	0,7986	1,9927	1,2345	1,2776	0,9685
17	0,8039	2,0029	1,2198	1,2729	0,9582
18	0,8090	2,0133	1,2059	1,2681	0,9483
19	0,8141	2,0239	1,1927	1,2634	0,9388
20	0,8192	2,0347	1,1800	1,2587	0,9297
21	0,8241	2,0458	1,1678	1,2539	0,9209
22	0,8290	2,0571	1,1562	1,2492	0,9125
23	0,8339	2,0686	1,1451	1,2444	0,9045
24	0,8387	2,0804	1,1344	1,2397	0,8967
25	0,8434	2,0924	1,1241	1,2349	0,8892
26	0,8480	2,1047	1,1142	1,2301	0,8820
27	0,8526	2,1172	1,1047	1,2254	0,8750
28	0,8572	2,1300	1,0956	1,2206	0,8683
29	0,8616	2,1431	1,0868	1,2158	0,8618
30	0,8660	2,1565	1,0783	1,2111	0,8555
31	0,8704	2,1702	1,0701	1,2063	0,8495
32	0,8746	2,1842	1,0622	1,2015	0,8436
33	0,8788	2,1985	1,0545	1,1968	0,8380
34	0,8829	2,2132	1,0472	1,1920	0,8325
35	0,8870	2,2282	1,0400	1,1873	0,8272
36	0,8910	2,2436	1,0332	1,1826	0,8221
37	0,8949	2,2593	1,0265	1,1779	0,8171
38	0,8988	2,2754	1,0201	1,1732	0,8123
39	0,9026	2,2919	1,0139	1,1685	0,8077
40	0,9063	2,3088	1,0079	1,1638	0,8032
41	0,9100	2,3261	1,0021	1,1592	0,7988
42	0,9135	2,3439	0,9965	1,1545	0,7946
43	0,9171	2,3621	0,9911	1,1499	0,7905
44	0,9205	2,3809	0,9858	1,1453	0,7866
45	0,9239	2,4001	0,9808	1,1408	0,7828

(II.) Kalibrační křivka pro manuální odečítání hodnot z grafu v rozsahu do 25 milimetrů posuvu



(III.) Kalibrační křivka pro manuální odečítání hodnot z grafu v rozsahu do 4 milimetrů posuvu

